Universität Hamburg
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Winter 2013/14

Topologie

Übungsaufgaben 13

Diese Aufgaben werden auf Wunsch in der letzten Übung besprochen, jedoch nicht korrigiert.

1. Zeigen Sie, dass die universelle Überlagerung $\widetilde{p} : \widetilde{B} \to B$ ihren Namen zurecht trägt, indem Sie folgende Aussage beweisen: Ist $p : E \to B$ irgendeine Überlagerung von B mit wegzusammenhängendem Totalraum E, so existiert eine Überlagerung $q : \widetilde{B} \to E$ so dass $\widetilde{p} = p \circ q$!

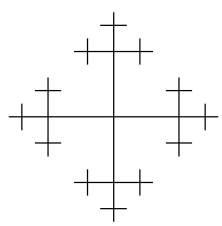
2. Beweisen Sie, dass der folgende Raum $\widetilde{X_2}$ der Totalraum der universellen Überlagerung von $X_2 = S^1 \vee S^1$, indem Sie

a) zeigen, dass der Raum einfach zusammenhängend ist, und

b) eine Überlagerung $\widetilde{p} : \widetilde{X_2} \to X_2$ konstruieren.

Konstruktion von $\widetilde{X_2}$: Wir konstruieren zunächst eine Folge von Graphen. G_0 sei der Graph mit vier Kanten und fünf Eckpunkten $x_0, \ldots, x_4$, in dem jede der Ecken $x_1, \ldots, x_4$ durch eine Kante der Länge 1 mit x_0 verbunden ist. G_1 entsteht aus G_0 durch hinzunehmen von 12 zusätzlichen Punkten x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} für $i = 1, \ldots, 4$, welche jeweils durch eine Kante der Länge 1 mit x_i verbunden werden. Im allgemeinen entsteht G_n aus G_{n-1}, indem an die insgesamt $4 \cdot 3^{n-1}$ freien Ecken $x_{i_1 \ldots i_n}$ jeweils drei neue Kanten der Länge 1 angesetzt werden. Wir haben natürliche Einbettungen

$$G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots$$



Die Abbildung zeigt das Bild einer Einbettung von G_2 in $\mathbb{R}^2$. Wir setzen nun $\widetilde{X_2} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$, versehen mit der Finaltopologie bezüglich der Einbettungen $G_n \subset \widetilde{X_2}$.

Bemerkung: Es folgt aus Aufgabe 1), dass dieser Totalraum auch die anderen X_k mit $k > 2$ universell überlagert.

3. Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen von zusammenhängenden Überlagerungen der Basis $B = \mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$!

4. Wie zerschneidet man ein Bagel in zwei Hälften, die eine Hopf-Verschlingung bilden?