Universität Hamburg Winter 2013/14
Janko Latschev, Fabian Kirchner, Giorgio Laguzzi

Topologie

Übungsaufgaben 1

1. *(1+2+1 Punkte)*

a) Seien A und B zwei verschiedene echte, nichtleere Teilmengen einer Menge X. Welche Einschränkungen gibt es an A und B, damit

$$\tau = \{\varnothing, X, A, B\}$$

eine Topologie auf X definiert?

b) Prüfen Sie, dass auf der Menge $X = \{a, b, c\}$ sowohl $\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ als auch $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ Topologien sind! Finden Sie die gröbste Topologie, welche τ_1 und τ_2 enthält, sowie die feinste Topologie, welche in beiden enthalten ist!

c) Geben Sie eine Menge X mit einer Topologie an, die weder diskret noch antidiskret ist, so dass die abgeschlossenen Mengen identisch mit den offenen Mengen sind!

2. *(2 Punkte)* Stimmen die beiden Topologien auf $\mathbb{R}$, welche durch die Basen

$$\beta_{\mathbb{R}} := \{(a, b] \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad \beta_{\mathbb{Q}} := \{(a, b] \mid a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

erzeugt werden, überein?

3. *(2+1+1 Punkte)* Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

a) Die von der Metrik induzierte Topologie auf X ist die gröbste, so dass für jedes $x_0 \in X$ die Abbildung $x \mapsto d(x, x_0)$ stetig ist.

b) Für jede nichtleere Teilmenge $A \subset X$ ist die Abbildung $x \mapsto d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ stetig, und das Urbild der Null ist gerade $\overline{A}$.

c) Für je zwei nichtleere, abgeschlossene und disjunkte Teilmengen A und B von X gibt es eine stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(0) = A$ und $f^{-1}(1) = B$.

4. *(4 Punkte)* Sei p eine Primzahl. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ definieren wir $\nu(z) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid p^n \text{ teilt } z\}$ und

$$d(x, y) := p^{-\nu(x-y)},$$

mit den Konventionen $\sup\{\varnothing \subset \mathbb{N}\} = 0$ und $p^{-\infty} = 0$. Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{Z}$ definiert, welche die starke Dreiecksungleichung

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$$

erfüllt. Was sind die Einheitssphären dieser Metrik? Wie sehen die ϵ-Bälle um $0 \in \mathbb{Z}$ aus?