

5. Die Liouville'schen Sätze

In diesem Vortrag wird eine Unterklasse der meromorphen Funktionen betrachtet, die Menge der elliptischen Funktionen. Diese werden zunächst formal eingeführt, es folgen die Sätze von Liouville (1847) sowie erste Folgerungen daraus. Konkrete Beispiele und weitergehende Folgerungen werden in den nachfolgenden Vorträgen behandelt. Der Vortrag orientiert sich am gleichnamigen Kapitel des Buches "Funktionentheorie 1" von Freitag/Busam. Wir betrachten im Folgenden meromorphe Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$.

Bevor wir die eigentliche Definition der elliptischen Funktionen betrachten können, benötigen wir eine kurze Vorüberlegung.

Def. Gitter

Sei $L \subseteq \mathbb{R}^n$ eine additive Untergruppe. Ist L diskret, so folgt aus dem Struktursatz, dass ein natürliches $0 \leq k \leq n$ und linear unabhängige Vektoren w_1, \dots, w_k existieren mit $L = \mathbb{Z}w_1 + \dots + \mathbb{Z}w_k$. Insbesondere ist L dann isomorph zu \mathbb{Z}^k . Man nennt k den Rang von L , und im Falle von $k = n$ nennt man L Gitter.

Insbesondere heißt $L \subseteq \mathbb{C}$ Gitter, falls $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ existieren, sodass diese reell linear unabhängig sind und $L = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ gilt.

Beh: Wir betrachten eine meromorphe, nicht konstante Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$.

Dann ist L_f , die Menge aller Perioden, eine diskrete Untergruppe.

Bew: Die Gruppeneigenschaften folgen direkt aus der Periodizität: Seien $a, b \in L_f, c \in \mathbb{C}$. Dann gilt $f(c + (a + b)) = f((c + a) + b) = f(c + a) = f(c)$, also ist f auch $a + b$ -periodisch (L_f ist abgeschlossen bzgl. "+"). Jede Funktion ist "0-periodisch", und folglich $0 \in L_f$. Damit existiert insbesondere ein neutrales Element, denn f ist genau dann $(a+0)$ -periodisch, wenn es a -periodisch ist. Für $-a$ gilt: $f(c + (-a)) = f(c + (-a) + a) = f(c)$, also ist mit $-a$ ein Inverses zu a in L_f enthalten. Die Assoziativität der Addition folgt direkt aus der Assoziativität in \mathbb{C} . Zur Diskretheit nehmen wir an, L_f besitze einen Häufungspunkt z . Sei $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine dagegen konvergente Folge in L_f , und sei a gewählt mit $f(a) \neq \infty$. Aufgrund der Stetigkeit muss f in $a + z$ denselben Wert annehmen wie in a , damit ist z eine Periode von f . Auf den Punkten $a + z, a + w_i, i \in \mathbb{N}$ ist dann aber f konstant, folglich nach dem Identitätssatz auf ganz \mathbb{C} , im Widerspruch zur Annahme. Also ist die Menge der Perioden einer nichtkonstanten Funktion diskret. \square

Wir zeigen den Struktursatz für den Spezialfall einer diskreten Untergruppe $L \subseteq \mathbb{C}$:

Beh: Sei L eine diskrete Untergruppe von \mathbb{C} . Dann existieren ein $k \in \{0, 1, 2\}$ und k linear unabhängige Vektoren w_i , sodass $\sum_i w_i \mathbb{Z} = L$ gilt.

Bew: Ist $L = \{0\}$, so wählen wir $k = 0$, denn L ist der Spann der leeren Menge. Sei nun L nichttrivial. Aufgrund der Diskretheit finden wir ein $z \neq 0 \in L$, welches minimalen Betrag besitzt. Entweder gilt nun $L = \mathbb{Z}z$ und wir sind fertig, oder wir finden erneut aufgrund der Diskretheit ein $w \in L \setminus \mathbb{Z}z$ mit minimalem Betrag. Gezeigt werden muss nun noch, dass z, w linear unabhängig sind und ganz L aufspannen.

Angenommen, sie wären linear abhängig. Dann gilt: $\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} : w = rz$. Sei nun $p \in \mathbb{Z}$ der ganzzahlige Anteil von r . Wegen der Untergruppeneigenschaft der Perioden gilt $w - pz \in L$, und $|w - pz| = |rz - pz| = (r - p)|z|$. Da w kein ganzes Vielfaches von z ist nach Definition, gilt $|r - p| \in (0, 1)$. Dies widerspricht dann aber der Minimalität von $|z|$, also sind z, w linear unabhängig.

Wir nehmen an, es gibt ein $a \in L$, welches sich nicht als ganze Linearkombination von z, w darstellen lässt. Da z, w linear unabhängig sind, finden wir eine Darstellung $a = pz + qw$, wobei p, q reell und nicht ganzzahlig sind. Wählt man nun $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $|p - k|, |q - l| \leq 0.5$, so gilt unter Verwendung der linearen Unabhängigkeit:

$$|(p - k)z + (q - l)w| < |(p - k)z| + |(q - l)w| \leq 0.5(|z| + |w|) \leq |w|, \text{ im Gegensatz zur Wahl von } w. \quad \square$$

Die beiden gezeigten Aussagen ergeben, dass wir für eine nichtkonstante meromorphe Funktion stets bis zu zwei Vektoren finden, welche die Untergruppe der Perioden aufspannen. Insbesondere finden wir für die im Folgenden definierten Funktionen stets ein entsprechendes Gitter, welches alle Perioden enthält.

Def. elliptische Funktion

f heißt elliptische (doppelt periodische) Funktion zum Gitter L , falls gilt:

- $f : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ist eine meromorphe Funktion
- $f(z + w) = f(z)$ für $w \in L, z \in \mathbb{C}$

Erster Liouville'scher Satz

Jede elliptische Funktion ohne Polstellen ist konstant.

Beweis: Sei f wie in der Voraussetzung. Wir betrachten die Grundmasche des Gitters bzgl. der "Basis" $(w_1, w_2) : F = \{t_1 w_1 + t_2 w_2; 0 \leq t_1, t_2 \leq 1\}$.

Sei nun $z \in \mathbb{C}$. Da w_1, w_2 eine Basis von \mathbb{C} aufgefasst als reeller Vektorraum bilden, finden wir eine eindeutige Darstellung $z = pw_1 + qw_2, p, q \in \mathbb{R}$. Nun finden wir aber ganze Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$, sodass gilt: $0 \leq (p - k), (q - l) \leq 1$, und folglich existiert mit $(p - k)w_1 + (q - l)w_2$ ein Punkt, welcher sich nur um einen in L liegenden Vektor von z unterscheidet und in F liegt. Somit wird aber jeder Wert von f auf \mathbb{C} bereits auf F angenommen. Da f als meromorphe Funktion stetig ist, wird auf der kompakten Grundmasche das Maximum angenommen. Da f keine Polstellen besitzt, ist dieses Maximum endlich. Dann ist aber f auf der Grundmasche beschränkt, nach obiger Überlegung somit aber auf ganz \mathbb{C} . Mit dem Satz von Liouville über beschränkte Funktionen folgt dann die Behauptung. \square

Der Beweis legt nahe, dass es für elliptische Funktionen genügt, diese nur auf der Grundmasche zu betrachten. Hierzu betrachten wir folgende Definition:

Die Faktorgruppe \mathbb{C}/L

Wir bezeichnen zwei Punkte in \mathbb{C} als äquivalent, falls ihre Differenz im Gitter L enthalten ist. Die Addition $[z] + [w] = [z + w]$ ist wohldefiniert und macht \mathbb{C}/L zur abelschen Gruppe. Zu jeder bzgl. des Gitters L elliptischen Funktion f findet sich eine eindeutige weitere Funktion \hat{f} , welche jeder Äquivalenzklasse $[z]$ in \mathbb{C}/L den Wert $f(z)$ zuordnet, wobei z ein Repräsentant der jeweiligen Äquivalenzklasse sei. Wir definieren das Residuum von \hat{f} auf \mathbb{C}/L in $[z]$ als Residuum von f in z . Auch diese Definition ist wohldefiniert. \mathbb{C}/L ist zudem homöomorph zu $S^1 \times S^1$, und wird entsprechend auch als Periodentorus bezeichnet.

Anmerkung

Die Definitionen sind wohldefiniert, also unabhängig vom jeweiligen Repräsentanten. Wir bemerken: Seien $a, a' \in [a], b, b' \in [b]$, d.h. $a' = a + l, b' = b + m$ mit $l, m \in L$. Dann gilt: $[a] + [b] = [a + b] = [a + b + (l + m)] = [a' + b'] = [a'] + [b']$, die Addition ist also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Kommutativität und Assoziativität folgen aus den entsprechenden Eigenschaften in \mathbb{C} , wenn wir zu Repräsentanten übergehen. Die Äquivalenzklasse der 0 ist das Nullelement, wie man durch Auswahl des Repräsentanten 0 in der Definition sieht. Auch die Inverse einer Klasse $[r]$ lässt sich als die Äquivalenzklassen der Inversen $[-r]$ in \mathbb{C} eines jeweils festgelegten Repräsentanten r erkennen. Also ist der Periodentorus zusammen mit der Addition eine abelsche Gruppe.

Seien $a, a' \in [a]$, d.h. $a' = a + l, l \in L$. Es gilt $\hat{f}([a]) = f(a) = f(a + l) = f(a') = f([a'])$. Damit ist aber die Definition von \hat{f} unabhängig von der Wahl des Repräsentanten, also wohldefiniert.

Wir betrachten ein elliptisches \hat{f} auf dem Periodentorus. Seien $a, a' \in [a], a' = a + l, l \in L$. B sei ein Ball um a , B' sei $B + l$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\hat{f}([a]) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} f(z + l) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B'} f(z) dz \\ &= \hat{f}([a'])\end{aligned}$$

Also ist die Berechnung des Residuums unabhängig vom jeweiligen Repräsentanten.

Zweiter Liouville'scher Satz

Eine elliptische Funktion f hat nur endlich viele Pole modulo L , und die Summe über die Residuen in diesen Polen verschwindet.

Beweis: Als elliptische Funktion ist f insbesondere meromorph, die Polstellenmenge P_f ist also diskret. Auf der kompakten Grundmasche besitzt f also nur endlich viele Pole, und folglich auch auf dem Periodentorus. Wir können nun ein a finden, sodass $\partial(a + F)$ keine Polstellen enthält, denn entweder besitzt ∂F keine Polstellen, oder wir können aufgrund der Diskretheit $b \in \mathbb{R}$ betragsmäßig klein genug wählen, sodass $a = b(w_1 + w_2)$ die Bedingung erfüllt, indem wir als b ein Viertel des Abstandes von ∂F zu $P_f \cap \text{int}(F)$ wählen. Jede Äquivalenzklasse, die in der Polstellenmenge enthalten ist, besitzt nun genau einen Repräsentanten im Inneren von $a + F$. Nach dem Residuensatz gilt nun aber für die gesuchte Summe:

$$\begin{aligned}
 2\pi i \sum_F \text{Res}(f, z) &= 2\pi i \sum_{a+F} \text{Res}(f, z) \\
 &= \int_{\partial(a+F)} f(z) dz \\
 &= \int_a^{a+w_1} f(z) dz + \int_{a+w_1}^{a+w_1+w_2} f(z) dz + \int_{a+w_1+w_2}^{a+w_2} f(z) dz + \int_{a+w_2}^a f(z) dz \\
 &= \int_{a+w_2}^{a+w_1+w_2} f(z) dz + \int_{a+w_1+w_2}^{a+w_2} f(z) dz + \int_{a+w_1}^{a+w_1+w_2} f(z) dz + \int_{a+w_2+w_1}^{a+w_1} f(z) dz \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

Def. Ordnung und b -Stellenordnung

Wir definieren die Ordnung einer elliptischen Funktion als die Anzahl der Pole auf \mathbb{C}/L , mit Vielfachheiten gezählt. Genauer: Durchläuft a ein Vertretersystem der Pole auf \mathbb{C}/L , so definieren wir $\text{Ord}(f) = -\sum_a \text{ord}(f, a)$.

Sei f elliptisch, und $f \neq 0$. Dann definieren wir die Nullstellenordnung von f als die Polstellenordnung von $1/f$. Für nichtkonstantes f und $b \in \mathbb{C}$ definieren wir die b -Stelle von f als Nullstelle von $g(z) = f(z) - b$. Die Nullstellenordnung von g heißt b -Stellenordnung von f . Man schreibt: $b\text{-Ord}(f)$ und $\infty\text{-Ord}(f) = \text{Ord}(f)$.

Direkte Folgerungen

Der Erste Liouville'sche Satz besagt dann genau: $\text{Ord}(f) = 0 \Leftrightarrow f$ ist konstant. Da das Residuum in einer einfachen Polstelle nicht verschwindet, folgt zudem direkt aus dem Zweiten Liouville'schen Satz: Es gibt keine elliptischen Funktionen erster Ordnung.

Dritter Liouville'scher Satz

Sei f eine nichtkonstante, elliptische Funktion.

Dann gilt $\text{Ord}(f) = b - \text{Ord}(f) \forall b \in \bar{\mathbb{C}}$. Insbesondere besitzt f gleich viele Null- und Polstellen (mit Vielfachheiten gerechnet).

Beweis: Im Fall von $b = \infty$ entspricht die Aussage genau der Definition. Im Weiteren genügt es, den Fall $b = 0$ zu betrachten, denn für $b \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Aussage für $g(z) = f(z) - b$.

Wir werden nun den zweiten Liouville'schen Satz auf die Funktion $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ anwenden. Hierzu stellen wir zunächst fest, dass g elliptisch ist, denn für $w \in L$ gilt:

$f'(a+w) = \lim_{z \rightarrow a+w} \frac{f(z)-f(a+w)}{z-a-w} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = f'(a)$. Somit ist f' elliptisch bzgl. des Gitters L und folglich auch g . Da g in jedem anderen Punkt nur einen komplexen Wert annimmt, kann g höchstens in den Nullstellen von f oder den Polstellen von f' Pole besitzen.

Wir betrachten nun diese beiden Fälle. Sei zunächst a eine Polstelle von f' . Dann muss a bereits Polstelle von f gewesen sein, denn ansonsten wäre f in einer Umgebung holomorph und somit auch f' als Ableitung von f . Insbesondere könnte a dann keine Polstelle von f' sein, denn holomorphe Funktionen besitzen keine Pole. Ist nun aber a ein Pol von f , so existieren ein $k \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe, in a nicht verschwindende Funktion h , sodass auf einer Umgebung von a gilt: $f(z) = \frac{1}{(z-a)^k} h(z)$.

Dann gilt aber auf einer Umgebung von a : $f'(z) = -\frac{1}{(z-a)^{k+1}} h(z) + \frac{1}{(z-a)^k} h'(z)$.

Nach Definition von h verschwindet der erste Term nicht, folglich besitzt f' in a einen Pol $(k+1)$ -ter Ordnung, d.h. es existiert eine holomorphe Funktion $m(z)$, sodass

$$f'(z) = \frac{1}{(z-a)^{k+1}} m(z)$$

gilt auf einer Umgebung von a . Damit gilt dann aber auf einer Umgebung von a :

$$g(z) = \frac{\frac{1}{(z-a)^{k+1}} m(z)}{\frac{1}{(z-a)^k} h(z)} = \frac{1}{(z-a)} \frac{m(z)}{h(z)},$$

wobei letzterer Bruch nach Definition der Funktionen in \mathbb{C}^* liegt. Damit besitzt g aber insbesondere einen Pol erster Ordnung in a . Aus den hiesigen Überlegungen folgt zudem, dass auch jeder Pol von f Pol von g ist.

Analog überlegt man sich, dass auch jede Nullstelle von f Pol von g ist: Ist nämlich a k -fache Nullstelle, so gilt auf einer Umgebung von a : $f(z) = (z-a)^k m(z)$

, wobei m holomorph ist und in a nicht verschwindet. Dann gilt aber lokal:

$$f'(z) = (z-a)^{k-1} m(z) + (z-a)^k m'(z),$$

$$\text{und damit } g(z) = \frac{1}{(z-a)} + \frac{m'(z)}{m(z)}.$$

Damit ist aber a erneut einfache Polstelle von g .

Die Pole von g entsprechen also genau den Null- und Polstellen von f . Nach dem 2.

Liouville'schen Satz und dem Residuensatz folgt nun:

$$0 = \sum_a \text{Res}(g, a) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N(0) - N(\infty),$$

wobei wir über den Rand einer eventuell verschobenen Grundmasche integrieren. Damit ist aber die Anzahl von Null- und Polstellen von f gleich (mit Vielfachheiten) und es gilt die Behauptung. \square

Insbesondere folgt daraus, dass eine Fortsetzung des Definitionsbereichs auf $\bar{\mathbb{C}}$ bis auf im konstanten Fall nicht möglich ist.

Def. Verzweigungspunkt

Sei f elliptisch, nicht konstant. $b \in \bar{\mathbb{C}}$ heißt Verzweigungspunkt, falls ein a existiert, sodass a mehrfache b -Stelle von f ist.

weitere Folgerungen

Wir bemerken zunächst: ∞ ist Verzweigungspunkt von f gdw. 0 ist Verzweigungspunkt von $1/f$, dies folgt unmittelbar aus der Definition.

Beh: Sei f elliptisch, nicht konstant, und $b \neq \infty$. Dann ist b genau dann Verzweigungspunkt, wenn es ein z gibt mit $f(z)=b$ und $f'(z)=0$

Bew: Wir stellen zunächst fest: Ist $b \neq \infty$, so ist f auf einer Umgebung der Urbilder holomorph, und $g(z) = f(z) - b$ besitzt dort folglich eine Taylorentwicklung. Die Eigenschaft eines Verzweigungspunktes ist nun äquivalent dazu, dass die ersten beiden Koeffizienten dieser Reihenentwicklung verschwinden. Insbesondere verschwindet in den dazugehörigen mehrfachen b - Stellen die Ableitung. □

Beh: Sei f elliptisch, nicht konstant. Es gibt nur endlich viele Verzweigungspunkte b über \mathbb{C}/L , und nur endlich viele Punkte $a \in \mathbb{C}/L$ mit $f(a) = b$.

Bew: Die endliche Anzahl der Verzweigungspunkte ist auf folgende Art und Weise ersichtlich: Angenommen, es gäbe unendlich viele Verzweigungspunkte. Dann gibt es auch unendlich viele von ∞ verschiedene. Sei $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge solcher Punkte. Dann existiert eine Folge von Punkten $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ auf \mathbb{C}/L , sodass $f(a_i) = b_i$. In jedem dieser Punkte verschwindet nach obiger Bemerkung die Ableitung. Da \mathbb{C}/L kompakt ist, finden wir eine konvergente Teilfolge der a_i , welche auf \mathbb{C}/L konvergiert. Aufgrund der Stetigkeit folgt, dass im Grenzwert die Ableitung ebenfalls 0 sein muss. Aus dem Identitätssatz folgt nun, dass f' die Nullfunktion sein muss, und folglich f konstant, im Widerspruch zur Annahme. Die Endlichkeit der Urbildanzahl folgt nun aus dem 3. Liouville'schen Satz, denn die Anzahl der Polstellen mit Vielfachheiten ist aufgrund der Diskretheit endlich. Somit wird aber jeder andere Wert auch nur endlich oft angenommen (mit Vielfachheiten). Ist nun N die Anzahl der Polstellen mit Vielfachheiten, so ist die Anzahl der Urbilder eines Punktes b gleich N , falls er kein Verzweigungspunkt ist, und strikt kleiner als N , falls genau dies zutrifft. □