

Geometrischer Beweis des großen Satzes von Picard

Olaf Steinberg

Vortrag am 06.11.2013

INHALT

1	Motivation	1
1.1	Der große Satz von Picard	1
2	Geometrische Überlegungen	1
2.1	Grundbegriffe	1
2.2	Verschiedene Metriken im Detail	3
2.3	Konstruktion einer Metrik unter Nebenbedingungen	5
2.4	Zwischenbilanz, eine zentrale Bemerkung	7
3	Vorbereitungen für den Beweis des Satzes von Picard	7
3.1	Das Lemma von Schwarz	7
3.2	Normale Familien und der Satz von Montel	9
4	Beweis des großen Satzes von Picard	11

Vortrag und Ausarbeitung orientieren sich an S. Krantz, "Complex Analysis: The Geometric Viewpoint", §2, S.67-94. Ziel ist es, einen alternativen Beweis des großen Satzes von Picard zu beleuchten, der mittels der hyperbolischen Metrik geometrisch motiviert ist.

1 Motivation

In den vorherigen Vorträgen haben wir nacheinander Vorbereitungen für den Beweis des großen Satzes von Picard kennengelernt und diesen dann auch bewiesen. Im Gegensatz zu der dabei sehr rechenintensiven Vorgehensweise wollen wir hier eine alternative Herangehensweise vorstellen.

Dabei werden wir zuerst einige geeignete geometrische Prinzipien kennenlernen und an Beispielen beleuchten. Unser Ziel ist es dann, die Vorbereitungen für den Beweis des großen Satzes von Picard mit diesen geometrischen Prinzipien zu beweisen. Der eigentliche Beweis des großen Satzes von Picard wird hiervon nicht berührt und ist identisch zum Beweis, der im letzten Vortrag geführt wurde. Er ist der Vollständigkeit halber hier mit angegeben, wird im Vortrag jedoch nicht präsentiert.

1.1 Der große Satz von Picard

Mit dieser Motivation im Hintergrund wollen wir nun den großen Satz von Picard formulieren:

Satz. Sei $U = B'(0, \alpha) = B(0, \alpha) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{C}$ ein punktierter Ball um 0 und sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit wesentlicher Singularität im Punkt 0. Dann gilt für jede beliebige punktierte Umgebung $V \subseteq U$ um 0, dass das Bild von $f|_V$ alle komplexen Werte bis auf maximal eine Ausnahme annimmt.

2 Geometrische Überlegungen

2.1 Grundbegriffe

In klassischer Vorstellung wird der Begriff der Metrik auf einer Menge X verstanden als eine Abstandsfunktion $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften, dass sie symmetrisch und nichtnegativ definit ist und dass die Dreiecksungleichung gilt. In bestimmten metrischen Räumen kann man den Abstand zweier Punkte bzgl. dieser Metrik als Länge der kleinsten (abschnittsweise) stetig differenzierbaren Kurve in X mit diesen Endpunkten betrachten: Mit der Länge $l(\gamma) := \int_p^q |\gamma'(t)| dt$. Dies benötigt die vorherige Definition der Abbildung $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}$, also die Länge eines Vektors.

Wir wollen in diesem Vortrag anders an einen Längenbegriff herangehen und beziehen uns dabei immer auf die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Definition. Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, dann nennen wir eine stetige, nichtnegative Funktion $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}$, die auf ihrem Träger zweifach stetig differenzierbar ist, Metrik auf U . Die Länge eines Vektors $\eta \in \mathbb{C}$ am Fußpunkt $z \in U$ definieren wir als

$$\|\eta\|_{\rho, z} := \rho(z) \cdot |\eta|$$

, wobei $|\eta|$ die bekannte euklidische Länge ist.

Die Länge einer abschnittsweise stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ bzgl. dieser Metrik definieren wir dann als

$$l_\rho(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\rho, \gamma(t)} dt$$

Der Abstand zweier Punkte bzgl. dieser Metrik ist dann wie gewohnt das Infimum über die Längen der (abschnittsweise) stetig differenzierbaren Kurven in U mit diesen Endpunkten.

Bem: Die Funktion, die wir hier, der oben erwähnten Literatur folgend, Metrik nennen, ist eigentlich eine konforme Abbildung die als konformer Faktor zu einer Riemannschen Metrik aufgefasst werden kann. Aus dieser erhält man wie gewohnt eine Abstandsfunktion. Wir werden weiterhin den Begriff Metrik verwenden, wissen aber um die eigentliche Bedeutung.

Aufgrund dessen werden wir hier Metriken betrachten, die im Allgemeinen positiv sind und nur eventuell isolierte Nullstellen haben.

Mitunter ist es sinnvoll, eine Metrik unter einer Funktion zurückzuziehen, wenn die Menge der kritischen Punkte von f höchstens diskret, besser sogar leer ist:

Definition. Seien U_1, U_2 zwei Gebiete, σ eine Metrik auf U_2 und $f : U_1 \rightarrow U_2$ stetig differenzierbar. Auf U_1 wird dann durch zurückziehen eine Metrik definiert:

$$f^*\sigma(z) = \sigma(f(z)) \cdot |f'(z)|$$

Dabei ist $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})$ wie wir es aus der Funktionentheorie definiert kennen (Analog war $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$). Mit einfacher Rechnung ist der Laplace-Operator

$$4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta$$

Wir wollen nun ein weiteres geometrisches Konzept, welches eng verbunden mit der Metrik ist, vorstellen:

Definition. Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit Metrik ρ , dann ist die Krümmung der Metrik ρ im Punkt z definiert, auf dem Träger der Metrik, als

$$\kappa_{U, \rho}(z) = \kappa(z) := \frac{-\Delta \log \rho(z)}{(\rho(z))^2}$$

Die Definition der Krümmung erlaubt es, invariant unter konformen Abbildungen (also bijektive holomorphe Abbildungen, deren Ableitung nie verschwindet) zu sein, doch zuerst benötigen wir noch ein Lemma:

Lemma. Sei f eine nicht verschwindende holomorphe Funktion auf einem Gebiet U . Dann ist $\log(|f|^2)$ harmonisch, d.h. $\Delta \log(|f|^2) = 0$.

Beweis.

Mit $|f|^2 = f\bar{f}$ ist $\Delta \log(|f|^2) = \Delta(\log f + \log \bar{f}) = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log f + 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} \log \bar{f} = 0 \quad \square$

Proposition 1. Seien U_1, U_2 Gebiete und $h : U_1 \rightarrow U_2$ eine konforme Abbildung. Ist ρ eine Metrik auf U_2 , so ist

$$\kappa_{U_1, h^* \rho}(z) = \kappa_{U_2, \rho}(h(z)) \quad \forall z \in U_1$$

Beweis. Nach Definition ist

$$\kappa_{U_1, h^* \rho}(z) = \frac{-\Delta \log[\rho(h(z)) \cdot |h'(z)|]}{|\rho(h(z)) \cdot |h'(z)||^2} = \frac{-\Delta \log \rho(h(z)) - \Delta \log(|h'(z)|)}{|\rho(h(z)) \cdot |h'(z)||^2}$$

Da wir die Krümmung lokal betrachten und damit auch Δ lokal betrachten und h konform ist (somit $h'(z) \neq 0$), können wir lokal $h'(z) = (g(z))^2$ für eine geeignete holomorphe Funktion g setzen. Dann gilt mit $|g^2| = |g|^2$ und dem Lemma, dass $0 = \Delta \log |g|^2 = \Delta \log |h'(z)|$ ist, also verschwindet der entsprechende Term und es ist

$$= \frac{-(\Delta \log \rho|_{h(z)}) \cdot |h'(z)|^2}{[\rho(h(z)) \cdot |h'(z)|]^2} = \frac{-\Delta \log \rho|_{h(z)}}{(\rho(h(z)))^2} = \kappa_{U_2, \rho}(h(z))$$

$\square$

2.2 Verschiedene Metriken im Detail

Wir wollen uns nun ein paar Metriken näher ansehen:

Euklidische Metrik: Die Euklidische Metrik, also die Standardmetrik, ordnet Vektoren Längen zu unabhängig vom Fußpunkt dieser Vektoren, die Metrik ist also konstant: $\tau(z) \equiv 1$ sodass $\|\eta\|_{\tau, z} = |\eta| = \|\eta\|_{Std}$ ist. Die Krümmung ist, unserer Vorstellung als Änderungsrate, $\kappa_\tau \equiv 0$.

sphärische Metrik: Auf der Sphäre $S^2 \cong \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ können wir die Metrik $\sigma(z) := \frac{2}{1+|z|^2}$ betrachten. Ihre Krümmung ist $\kappa_\sigma \equiv 1$, denn

$$\begin{aligned} -\Delta \log \frac{2}{1+|z|^2} &= -\Delta(\log(2) - \log(1+z\bar{z})) = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log(1+z\bar{z}) \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{1+z\bar{z}} = 4 \frac{(1+z\bar{z}) - z\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2} = \frac{4}{(1+|z|^2)^2} \end{aligned}$$

Wir wollen diese beiden Metriken vergleichen:

Sei $h : \mathbb{C} \rightarrow \overline{C} \cong S^2$, $h(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y, -1+x^2+y^2)$ die stereographische Projektion bzgl. des Nordpols, $\mathbb{C}$ mit der Metrik σ und $\overline{C}$ mit der von τ im $\mathbb{R}^3$ induzierten Metrik betrachtet. Wir wollen nun $h_*(\frac{\partial}{\partial x})$ und $h_*(\frac{\partial}{\partial y})$ betrachten:

$$h_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{4x}{(1+x^2+y^2)^2} \right)$$

$$h_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \left(\frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{2+2x^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{4y}{(1+x^2+y^2)^2} \right)$$

Betrachten wir nun die inneren Produkte

$$\begin{aligned} g_{xx} &= \langle h_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), h_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \rangle = \left(\frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2} \right)^2 + \left(\frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2} \right)^2 + \left(\frac{4x}{(1+x^2+y^2)^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(1+x^2+y^2)^4} (4 - 4x^2 + 4y^2 - 4x^2 + 4x^4 - 4x^2y^2 + 4y^2 - 4x^2y^2 + 4y^4 + 16x^2y^2 + 16x^2) \\ &= 4 \frac{1 + 2x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2 + x^4 + y^4}{(1+x^2+y^2)^4} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g_{yy} &= \langle h_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), h_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \rangle = \left(\frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2} \right)^2 + \left(\frac{2+2x^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2} \right)^2 + \left(\frac{4y}{(1+x^2+y^2)^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} (16x^2y^2 + 4 + 4x^2 - 4y^2 + 4x^2 + 4x^4 - 4x^2y^2 - 4y^2 - 4x^2y^2 + 4y^4 + 16y^2) \\ &= 4 \frac{1 + 2x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2 + x^4 + y^4}{(1+x^2+y^2)^4} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

und

$$g_{xy} = g_{yx} = \langle h_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), h_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \rangle = \frac{(-8xy + 8x^3y - 8xy^3 - 8xy - 8x^3y + 8xy^3 + 16xy)}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$$

Hieraus erhalten wir, dass $\langle \eta, \eta \rangle_{h^*\tau, (x,y)} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \langle \eta, \eta \rangle_{\tau, (x,y)}$ ist, also in Norm-Notation $\|\eta\|_{h^*\tau, (x,y)} = \frac{1}{1+x^2+y^2} \|\eta\|_{\tau, (x,y)}$. Identifizieren wir $z = (x, y)$, also $x^2 + y^2 = |z|^2$, so ist

$$\|\eta\|_{h^*\tau, z} = \frac{1}{1+|z|^2} \|\eta\|_{\tau, z} = \|\eta\|_{\sigma, z}$$

Da η und $z = (x, y)$ beliebig waren, gilt $h^*\tau(z) = \sigma(z)$, wir können also σ als τ , zurückgezogen entlang h , betrachten.

Nun betrachten wir die **Poincaré-Metrik** auf $\mathbb{D}$:

$$\rho(z) := \frac{1}{1 - |z|^2}$$

Bem: In der Literatur gibt es zwei Versionen, eine mit Zähler 1 und eine mit Zähler 2. Wir halten uns an die anfangs erwähnte.

Eigenschaften (aus der Funktionentheorie bekannt):

Krümmung: Die Krümmung ist gerade $\kappa_\rho \equiv -4$, wie man aus der Berechnung für σ analog sieht.

kürzeste Kurven: kürzeste Kurven zwischen zwei Punkten $p, q \in \mathbb{D}$ sind gerade die Kreissegmente auf dem Kreis, der durch p und q verläuft und Senkrecht auf $\partial\mathbb{D}$ steht.

Durchmesser $\mathbb{D}$: Sei $\gamma(t) = t$ eine Kurve, wir wollen für $\varepsilon > 0$ die Länge betrachten:

$$\int_0^{1-\varepsilon} \|\gamma'(t)\|_{\rho, \gamma(t)} dt = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

Diese geht für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen ∞ .

Abstand: $d_\rho(p, q) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \left| \frac{p-q}{q-\bar{p}q} \right|}{1 - \left| \frac{p-q}{q-\bar{p}q} \right|} \right)$

2.3 Konstruktion einer Metrik unter Nebenbedingungen

Wir haben nun drei verschiedene Metriken kennengelernt mit unterschiedlichsten Eigenschaften. Unser erworbenes Wissen um die Eigenschaften und deren Unterschiede wollen wir nun nutzen, um eine weitere Metrik zu konstruieren, die speziell motiviert ist:

Der kleine Satz von Picard besagt, dass, sobald eine ganze Funktion mindestens 2 komplexe Werte nicht annimmt, diese konstant ist.

Ein möglicher elementarer Schritt dahin ist, eine Metrik auf dem Bild einer solchen Funktion zu finden, deren Krümmung echt negativ ist.

Wir können, nach Komposition mit einer Möbiustransformation, annehmen, dass wir eine solche Metrik auf $\mathbb{C}_{0,1} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ konstruieren (weitere ausgelassene Werte ignorieren wir).

Da wir zwei Werte, 0 und 1 auslassen, wollen wir beide gleichermaßen als Singularitäten behandeln. Wir werden zwei Faktoren unterscheiden: z und $z-1$. Wir betrachten weiteres für den ersten Fall

Da die Krümmung invariant unter Rotation (konforme Abbildung) ist, soll auch die Metrik invariant unter Rotation sein, also betrachten wir eine Funktion von $|z|$.

Um eine negative Krümmung zu bekommen, sei $\alpha < 0$ so gewählt, dass

$$0 > \kappa_{|z|^\alpha}(z) = \frac{-\Delta \log |z|^\alpha}{|z|^{2\alpha}} = \frac{-(-\alpha \frac{1}{|z|^2})}{|z|^{2\alpha}} = \alpha |z|^{-2\alpha-2}$$

Ist nun $|z|$ klein (nahe 0), so muss $\alpha > -1$ sein - ist aber $|z|$ groß, so muss $\alpha < -1$ sein. Wir benötigen also zwei Faktoren, eine Potenz von $|z|$ für das Verhalten nahe 0 und eine Potenz von $1 + |z|$ für das Verhalten nahe ∞ .

Für den Faktor $|z-1|$ gilt analoges für das Verhalten, sodass wir auch hier diese Ausdrücke berücksichtigen.

Wir haben nun eine Form

$$\mu(z) = |z|^{\alpha_1} (1 + |z|^{\alpha_2})^{\alpha_3} \cdot |z-1|^{\beta_1} (1 + |z-1|^{\beta_2})^{\beta_3}$$

wobei die Potenzen im Verhalten an verschiedenen Punkten eine Rolle spielen: Nahe 0 wirkt vor allem α_1 , nahe 1 vor allem β_1 und nahe ∞ alle. Es muss jedoch $\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 < 0$ sein, während $\alpha_1 > -1$ sein sollte (und gleiches für die β). Damit die Singularitäten 0 und 1 gleichwertig sind und wir in gewisser Weise symmetrisch sind, sollte $\alpha_i = \beta_i$ sein.

Eine Lösung dieser Bedingungen ist $\alpha_1 = \beta_1 = -\frac{5}{6}$, $\alpha_2 = \beta_2 = \frac{1}{3}$ und $\alpha_3 = \beta_3 = \frac{1}{2}$, sodass

$$\mu(z) = \left[\frac{(1 + |z|^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}{|z|^{\frac{5}{6}}} \right] \cdot \left[\frac{(1 + |1-z|^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}{|1-z|^{\frac{5}{6}}} \right]$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Krümmung von μ echt kleiner als 0 ist:

Nach dem Lemma ist $\log |z|^2$ harmonisch, d.h. $\Delta(\log |z|^{\frac{5}{6}}) = \frac{5}{12} \Delta(\log |z|^2) = 0$.

Also gilt

$$\Delta \log \left[\frac{(1 + |z|^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}{|z|^{\frac{5}{6}}} \right] = \frac{1}{2} \Delta \log(1 + |z|^{\frac{1}{3}}) = 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log(1 + (z\bar{z})^{\frac{1}{6}})$$

und

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log(1 + (z\bar{z})^{\frac{1}{6}}) &= 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(z \cdot \frac{1}{6} \cdot (z\bar{z})^{-\frac{5}{6}} \cdot \frac{1}{1 + (z\bar{z})^{\frac{1}{6}}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[(z\bar{z})^{-\frac{5}{6}} \cdot \frac{1}{1 + (z\bar{z})^{\frac{1}{6}}} + z \cdot \left(\frac{\bar{z} \cdot \frac{-5}{6} \cdot (z\bar{z})^{-\frac{11}{6}}}{1 + (z\bar{z})^{\frac{1}{6}}} + \frac{(z\bar{z})^{-\frac{5}{6}} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{6} \cdot (z\bar{z})^{-\frac{5}{6}}}{(1 + (z\bar{z})^{\frac{1}{6}})^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{|z|^{-\frac{5}{3}}}{1 + |z|^{\frac{1}{3}}} - \frac{5}{6} \frac{|z|^{-\frac{5}{3}}}{1 + |z|^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{6} \frac{|z|^{-\frac{4}{3}}}{(1 + |z|^{\frac{1}{3}})^2} \right] = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{6}{6} - \frac{5}{6} \right) \cdot \frac{|z|^{-\frac{5}{3}}}{(1 + |z|^{\frac{1}{3}})^2} - \frac{1}{6} \frac{|z|^{-\frac{4}{3}}}{(1 + |z|^{\frac{1}{3}})^2} \right] \end{aligned}$$

Also

$$\Delta \log \left[\frac{(1 + |z|^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}{|z|^{\frac{5}{6}}} \right] = \frac{1}{18} |z|^{-\frac{5}{3}} (1 + |z|^{\frac{1}{3}})^{-2}$$

Für den zweiten Faktor erhalten wir analog

$$\Delta \log \left[\frac{(1 + |z-1|^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}{|z-1|^{\frac{5}{6}}} \right] = \frac{1}{18} |z-1|^{-\frac{5}{3}} (1 + |z-1|^{\frac{1}{3}})^{-2}$$

Und damit ist

$$\kappa_\mu(z) = -\frac{1}{18} \left[\frac{|z-1|^{\frac{5}{3}}}{(1+|z|^{\frac{1}{3}})^3(1+|z-1|^{\frac{1}{3}})} + \frac{|z|^{\frac{5}{3}}}{(1+|z|^{\frac{1}{3}})(1+|z-1|^{\frac{1}{3}})^3} \right]$$

Wir bemerken, dass $\kappa_\mu(z) < 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}_{0,1}$ ist, $\lim_{z \rightarrow 0} \kappa_\mu(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \kappa_\mu(z) = -\frac{1}{36}$ und $\lim_{z \rightarrow \infty} \kappa_\mu(z) = -\infty$ ist, κ_μ also echt kleiner als 0 ist. Wir finden also insbesondere eine positive Konstante B , sodass $\kappa_\mu(z) \leq -B \quad \forall z \in \mathbb{C}_{0,1}$ ist.

Wir wollen nun σ und μ vergleichen: Dazu betrachten wir $v = \frac{\sigma}{\mu}$ und wir bemerken sofort, dass v für z gegen 0 oder 1 gegen 0 geht, da in diesen Fällen σ beschränkt ist. Geht z gegen ∞ , so müssen wir nur die betragsmäßig größten Potenzen von $|z|$ bei σ und μ ansehen: $v \sim \frac{\frac{1}{|z|^2}}{\frac{|z|^{\frac{4}{3}}}{|z|^{\frac{10}{6}}}} = \frac{|z|^{\frac{4}{3}}}{|z|^2} = |z|^{-\frac{2}{3}}$, d.h. v geht für z gegen ∞ gegen 0. Da dies für alle Extremwerte von μ gilt, existiert ein $M > 0$, sodass $\sigma(z) \leq M \cdot \mu(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}_{0,1}$ ist.

2.4 Zwischenbilanz, eine zentrale Bemerkung

Mit Hilfe dieser Metrik kann man sehr leicht, zusammen mit dem folgenden Satz, den kleinen Satz von Picard beweisen. Da unser Ziel der große Satz von Picard ist und noch weitere Konzepte für dessen Beweis notwendig sind, gehen wir hier nicht weiter darauf ein.

Wir werden diese Metrik und den Vergleich zur sphärischen Metrik später noch nutzen, um ein analytisches Normalitätskriterium aus der geometrischen Eigenschaft von Funktionen, mindestens zwei Werte nicht anzunehmen, zu bekommen.

3 Vorbereitungen für den Beweis des Satzes von Picard

3.1 Das Lemma von Schwarz

Bem: Während das Lemma von Schwarz Aussagen über eine Funktion $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ macht, hat Ahlfors das Lemma umformuliert und einen Vergleich von Metriken als Ergebnis. Wir wollen mit Hilfe folgender Definition eine noch stärkere Version formulieren:

Definition. Wir definieren auf $B(0, \alpha)$ mit $A > 0$ die Metrik

$$\rho_\alpha^A(z) = \frac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^2 - |z|^2)}$$

Bem: ρ_1^4 ist gerade die Poincaré-Metrik und $\kappa_{\rho_\alpha^A} = -A$.

Satz 1. Sei U ein Gebiet mit Metrik σ , deren Krümmung durch eine negative Konstante $-B$ nach oben begrenzt ist. Für jede holomorphe Funktion $f : B(0, \alpha) \rightarrow U$ gilt dann

$$f^* \sigma(z) \leq \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \rho_\alpha^A(z) \quad \forall z \in B(0, \alpha)$$

Beweis. Zunächst betrachten wir für $0 < r < \alpha$ den Ball $B(0, r)$ mit der Metrik ρ_r^A

Wir bemerken, dass $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \rho_r^A = \rho_r^B$ ist und die Krümmung gerade konstant $-B$ ist.

Sei nun $v = \frac{\sqrt{B} f^* \sigma}{\sqrt{A} \rho_r^A} = \frac{f^* \sigma}{\rho_r^B}$, also ist v stetig und nichtnegativ. Da einerseits $f^* \sigma$ auf $\overline{B(0, r)} \subset B(0, \alpha)$ begrenzt ist und ρ_r^B für $|z| \rightarrow r$ gegen ∞ geht, geht v gegen 0 wenn $|z| \rightarrow r$. Da aber $v \geq 0$ ist nimmt v bei $t \in \overline{B(0, r)}$ das Maximum M an. Wir wollen zeigen, dass $M \leq 1$ ist:

Wäre $f^* \sigma(t) = 0$, so wäre $v \equiv 0$, sei also $f^* \sigma(t) > 0$. Dann ist die Krümmung $\kappa_{f^* \sigma}$ auch in t definiert und nach Voraussetzung ist $\kappa_{f^* \sigma} \leq -B$.

Da v in t ein Maximum hat, hat auch $\log v$ das Maximum in t und es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\geq \Delta \log v(t) = \Delta \log f^* \sigma(t) - \Delta \log \rho_r^B(t) \\ &= -\kappa_{f^* \sigma}(t) \cdot (f^* \sigma(t))^2 + \kappa_{\rho_r^B}(t) \cdot (\rho_r^B(t))^2 \\ &\geq B \cdot (f^* \sigma(t))^2 - B \cdot (\rho_r^B(t))^2 \end{aligned}$$

Also ist $M \leq 1$. Betrachten wir nun den Grenzwert dieser Ungleichung für $r \rightarrow \alpha$, so erhalten wir $f^* \sigma(t) \leq \rho_\alpha^B(t)$, also stimmt der Satz.

□

Bem. Wir erhalten die Aussagen des Lemmas von Schwarz wieder, indem wir $\alpha = 1$, $U = \mathbb{D}$ und $\sigma = \rho_\alpha^A = \rho_1^A$ die Poincaré-Metrik setzen. Ist $f(0) = 0$ vorausgesetzt, so gilt

$$\rho_1^A(0) \geq f^* \sigma(0) = |f'(0)| \sigma(f(0)) = |f'(0)| \rho_1^{-4}(0)$$

Division ergibt $|f'(0)| \leq 1$.

Da die Poincaré-Metrik kontrahiert, gilt $d_\rho(f(p), f(q)) \leq d_\rho(p, q)$, speziell

$$d_\rho(0, f(z)) \leq d_\rho(0, z) \text{ für } z \in \mathbb{D}. \text{ Definition eingesetzt ergibt } \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+|f(z)|}{1-|f(z)|} \right) \leq \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right).$$

Also $\frac{1+|f(z)|}{1-|f(z)|} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$ bzw. $\frac{1+|f(z)|}{1+|z|} \leq \frac{1-|f(z)|}{1-|z|}$.

Wäre nun $|f(z)| > |z|$, so wäre der erste Bruch > 1 und der zweite Bruch < 1 , ein Widerspruch!

3.2 Normale Familien und der Satz von Montel

Definition. Wir sagen, dass eine Folge komplexwertiger Funktionen auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ normal konvergiert, wenn sie auf allen kompakten Teilmengen von U gleichmäßig konvergiert.

Wir sagen, dass sie kompakt divergiert, wenn sie auf allen kompakten Teilmengen von U gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f \equiv \infty$ konvergiert.

Bem: Der Begriff einer normalen Familie kann für komplexwertige Funktionen definiert werden, kommt also ohne die Bedingung Holomorphie aus. Uns interessieren jedoch nicht nur holomorphe, sondern auch meromorphe Funktionen. Dazu erweitern wir die Definition der normalen Konvergenz für meromorphe Funktionen, sodass wir folgende Definition formulieren:

Definition. Sei $\mathcal{F}$ eine Familie meromorpher Funktionen auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$. Wir nennen $\mathcal{F}$ eine normale Familie, wenn jede Folge von Elementen aus $\mathcal{F}$ eine Teilfolge enthält, die normal konvergiert.

Bem: Die Besonderheit dieser Definition mit meromorphen Funktionen ist, dass das Konzept der kompakten Divergenz nicht benötigt wird: Divergiert eine Folge komplexwertiger (evtl. holomorpher) Funktionen kompakt gegen die Grenzfunktion $f \equiv \infty$, so konvergiert sie, aufgefasst als Folge meromorpher Funktionen, normal gegen $f \equiv \infty$.

Folgende Proposition wollen wir nur formulieren, ohne einen Beweis anzugeben. Zum einen wird diese Aussage nur in einem Hilfssatz benötigt und zum anderen würde der Beweis den Rahmen dieses Vortrags sprengen.

Proposition 2 (Ascoli/Arzela). Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $\mathcal{F}$ eine Familie gleichgradig stetiger Funktionen auf K , die alle durch eine gemeinsame Konstante beschränkt sind. Dann enthält $\mathcal{F}$ eine Folge (f_n) die auf K gleichmäßig konvergiert.

Mit dieser Definition von normalen Familien holomorpher Funktionen wollen wir den Satz von Marty beweisen:

Satz 2. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{F}$ eine Familie meromorpher Funktionen auf U . Sei σ die sphärische Metrik auf der 2-Sphäre S^2 . $\mathcal{F}$ ist genau dann normal, wenn die Familie $\{f^*\sigma : f \in \mathcal{F}\}$ auf kompakten Teilmengen von U gleichmäßig beschränkt ist.

Äquivalent dazu ist $\mathcal{F}$ genau dann normal, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq U$ eine Konstante M_K existiert, sodass für alle $z \in K$ und alle $f \in \mathcal{F}$ gilt: $\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leq M_K$

Bem: Da wir meromorphe Funktionen zulassen, kann es sein, dass $f(z) = \infty$ für ein $z \in U$ ist. In diesem Fall berechnen wir $f'(z)$, indem wir $\frac{1}{f}$ betrachten: $(\frac{1}{f})'(z) = \frac{-f'(z)}{f^2(z)}$, also $f'(z) = -f^2(z) \cdot (\frac{1}{f})'(z)$

Beweis. Die beiden Aussagen sind äquivalent, wie wir in den geometrischen Vorüberlegungen gesehen haben.

Wir werden nun die zweite Aussage beweisen:

Sei einerseits $K \subseteq U$ kompakt und es gelte $f^*\sigma = \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leq M_K \forall f \in \mathcal{F}, \forall z \in K$

Sei $V = \text{Int}(K)$ das Innere von K und $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist die Länge von $f \circ \gamma$ bzgl. der Sphäre

$$\int_a^b \|(f \circ \gamma)'(t)\|_{\sigma, f \circ \gamma(t)} dt = \int_a^b \sigma((f \circ \gamma)(t)) |(f \circ \gamma)'(t)| dt = \int_a^b \frac{2|f'(\gamma(t))|}{1+|f(\gamma(t))|^2} |\gamma'(t)| dt$$

Dies ist gerade $\leq \int_a^b M_K |\gamma'(t)| dt$. Diese Abschätzung ist unabhängig von $f \in \mathcal{F}$ und damit ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig als Funktion aus der euklidischen Metrik auf K in die sphärische Metrik auf $\mathbb{C}$. Nach der Proposition von Ascoli/Arzela folgt, dass $\mathcal{F}$ normal ist.

Sei andererseits $\mathcal{F}$ eine normale Familie, $f^\#(z) := \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$ und $K \subseteq U$ kompakt.

Angenommen, die Familie $\{f^\# : f \in \mathcal{F}\}$ sei nicht gleichmäßig beschränkt auf K . Dann existiert eine Teilfolge $(f_j)^\#$, sodass $\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{z \in K} f_j^\#(z) = \infty$.

Nach Definition einer normalen Familie gibt es jedoch für jedes $p \in U$ eine Umgebung $N(p)$ auf der (f_j) normal gegen eine meromorphe Funktion konvergiert.

Da $(\frac{1}{f_j})^\# = \frac{2|\frac{f_j'(z)}{f_j^2(z)}|}{1+|\frac{1}{f_j(z)}|^2} = \frac{2|f_j'(z)|}{|f_j(z)|^2+1} = f_j^\#$ ist konvergieren auch die $f_j^\#$ normal auf den $N(p)$. Da K kompakt ist finden wir eine endliche Teilüberdeckung der offenen Mengen $N(p)$. Da die $f_j^\#$ auf jeder dieser $N(p)$ beschränkt sind, existieren endlich viele obere Schranken M_K^p , deren Maximum auf ganz K die Familie $(f_j^\#)$ beschränkt, und damit ist $(f_j^\#)$ auf K gleichmäßig beschränkt. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und somit gilt der Satz. □

Bem: Dieser Satz und sein Beweis zeigen und profitieren davon, dass die Bedingung an eine Familie, normal zu sein, eigentlich eine Bedingung für gleichgradige Stetigkeit ist, sofern man diese in der richtigen Metrik betrachtet.

Wir wollen nun den Satz von Montel in einer allgemeineren Version formulieren und beweisen:

Satz 3. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $p, q, r \in \overline{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden. Ist $\mathcal{F}$ eine Familie meromorpher Funktionen $f_n : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \{p, q, r\}$, so ist $\mathcal{F}$ normal.

Beweis. Mit einer Möbiustransformation können wir $p = 0, q = 1, r = \infty$ annehmen, sodass die f_n holomorph sind und auf $\mathbb{C}_{0,1}$ abbilden. Sei $p \in U$ beliebig, wir wollen für ein $\alpha > 0$ den Ball $B(p, \alpha)$ betrachten. Mit einer weiteren Möbiustransformation können wir jedoch $p = 0$ annehmen, sodass wir $V_\alpha = B(0, \alpha) \subseteq U$ betrachten. Ist $\mathcal{F}$ auf V_α normal für alle $\alpha > 0$ mit $V_\alpha \subseteq U$, so ist $\mathcal{F}$ auch auf U normal.

Betrachten wir nun die in 2.3 konstruierte Metrik μ . Multiplizieren wir μ mit geeigneter positiver Konstante, so ist die Krümmung $\kappa_\mu < -4$. Nach der stärkeren Version des Schwarzschen Lemmas mit $A = B = 4$ gilt $f^*\mu(z) \leq \rho_\alpha^A(z)$, $\forall z \in V_\alpha, \forall f \in \mathcal{F}$.

Der Vergleich der Metriken μ und σ in 2.3 ergab ein $M > 0$, sodass $\sigma(z) \leq M \cdot \mu(z)$ gilt.

Wir erhalten $f^*\sigma \leq M \cdot f^*\mu \leq M \cdot \rho_\alpha^A$ auf V_α . Damit ist $f^*\sigma$ auf allen kompakten Teilmengen von V_α unabhängig von $f \in \mathcal{F}$ beschränkt und somit ist $\mathcal{F}$ nach dem Satz von Marty auf V_α normal. Da dies für alle $\alpha > 0$ mit $V_\alpha \subseteq U$ gilt, ist $\mathcal{F}$ auf U normal. $\square$

Bem: Zur Verdeutlichung, was hier geschehen ist: Aus der geometrischen Beobachtung, dass meromorphe Funktionen drei Werte nicht annehmen (oder holomorphe Funktionen zwei Werte), können wir, mit der richtigen Metrik, eine Abschätzung geben als Bedingung für die Normalität dieser Funktionen, also einer eher analytischen Eigenschaft.

4 Beweis des großen Satzes von Picard

Wir haben nun genügend Werkzeug, um den großen Satz von Picard leicht zu beweisen:

Beweis. Wir wollen den Satz indirekt beweisen. Durch geeignete Skalierungen und Drehung können wir annehmen, dass $f : U = B(0, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf U ist und nur Werte in $\mathbb{C}_{0,1}$ annimmt.

Wir betrachten nun die Familie $\mathcal{F} = \{f_n : U \rightarrow \mathbb{C}_{0,1}, f_n(z) = f(\frac{z}{n})\}$, welche aufgrund der Verallgemeinerung des Satzes von Montel normal ist. Nach der Bemerkung zu normalen Familien holomorpher Funktionen existiert eine Teilfolge (f_{n_k}) , die entweder normal konvergiert oder kompakt divergiert.

Trifft der erste Fall zu, so sind die Funktionen $\{f_{n_k}\}$ auf kompakten Teilmengen beschränkt, konkret bspw. auf dem Kreis $\partial B(0, \frac{1}{2})$ durch die Konstante $C > 0$. Dann ist aber f auf den Kreisen $\partial B(0, \frac{1}{2n_k})$ durch C beschränkt. Nach dem Maximumsprinzip ist f sogar auf $B(0, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$ durch M beschränkt, d.h. 0 ist eine hebbare Singularität.

Trifft andererseits der zweite Fall zu, so betrachten wir $\{\frac{1}{f_{n_k}}\}$. Da die Teilfolge (f_{n_k}) auf kompakten Teilmengen gegen ∞ divergiert, konvergiert die Teilfolge $(\frac{1}{f_{n_k}})$ auf kompakten Teilmengen gegen 0. Analog hat $\frac{1}{f}$ in 0 eine hebbare Singularität, die gleichzeitig eine Nullstelle ist. Damit hat f in 0 eine Polstelle.

Lässt also f zwei Werte im Bild aus, so kann f in 0 keine wesentliche Singularität haben. $\square$