3.Vortrag: Der Satz von Schottky und der große Satz von Picard

Micha Nitsch

Dieser Vortrag folgt dem Buch von R. Remmert, "Funktionentheorie 2", $\S 10.3 - 10.4, S.235 - 240$.

1. Satz von Schottky

1.1 Definition: *Wir bezeichnen mit $S(r), r \in I\!R$ die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$ mit $|f(0)| \leq r$, die nicht die Werte 0 und 1 annehmen.*

1.2 Definition: *Wir wählen eine Konstante $\beta > 0$, für welche der* BLOCHschen Satz *gilt (z.B. $\beta = \frac{1}{12}$) und definieren in $(0,1) \times (0, \infty)$ eine positive Funktion*
$L(\Theta, r) := \exp\left[\pi \exp \pi \left(3 + 2r + \frac{\Theta}{\beta(1-\Theta)}\right)\right]$

1.3 Satz von Schottky
Für jede Funktion $f \in S(r)$ gilt
$|f(z)| \leq L(\Theta, r)$ *für alle* $z \in \mathbb{D}$ *mit* $|z| \leq \Theta,\ 0 < \Theta < 1.$

Dieser Satz ist kräftiger als der kleine PICARDsche Satz, wie wir im Folgenden sehen werden. Mit dem SCHOTTKYschen Satz lassen sich die Sätze Montel und Vitali wesentlich verschärfen. Die Schrankenfunktion $L(\Theta, r)$ lässt sich noch wesentlich verbessern, womit wir uns in diesem Vortrag allerding nicht beschäftigen werden.
Bevor wir zum Beweis des Satzes kommen, bedarf es noch einiger Vorüberlegungen.

1.4 Lemma

a) *Es gilt* $\cos(\pi a) = \cos(\pi b) \quad \Leftrightarrow \quad b = \pm a + 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$
b) *Zu jedem $w \in \mathbb{C}$ gibt es ein $v \in \mathbb{C}$ mit $\cos(\pi v) = w$ und $|v| \leq 1 + |w|$*

Beweis des Lemmas:
zu a)
" $\Leftarrow$ " klar, da Cosinus 2π-periodisch.
" $\Rightarrow$ " Es gilt $\cos \pi a = \cos \pi b$. Mit dem Additionstheoremen folgt

$$0 = \cos \pi a - \cos \pi b = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(a+b)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(a-b)\right)$$

Daraus folgt, entweder $\sin\left(\frac{\pi}{2}(a+b)\right) = 0$ oder $\sin\left(\frac{\pi}{2}(a-b)\right) = 0$. Womit also $\frac{\pi}{2}(a \pm b) = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$. Damit folgt die Behauptung.

zu b)
Da $\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ surjektiv ist, exisitert zu jedem $w \in \mathbb{C}$ ein $v = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $\cos \pi v = w$.
Aufgrund der $2\pi-$Periorität können wir außerdem $|x| \leq 1$ annehmen.
Mit den Additionstheoremen, $\sinh(x) = -i \sin(ix)$, $\cosh(x) = \cos(ix)$ und $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ folgt:

$$\begin{aligned}
|w|^2 = |\cos \pi v|^2 &= |\cos(x\pi + iy\pi)|^2 \\
&= |\cos(\pi x)\cos(i\pi y) - \sin(\pi x)\sin(i\pi y)|^2 \\
&= |\cos(\pi x)\cosh(\pi y) + i \sin(\pi x)\sinh(\pi y)|^2 \\
&= \cos^2(\pi x)\cosh^2(\pi y) + \sin^2(\pi x)\sinh^2(\pi y) \\
&= \cos^2(\pi x) + \sinh^2(\pi y)
\end{aligned}$$

Außerdem lässt sich der Sinus Hyperbolicus für $x \geq 0$ abschätzen durch

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &\geq x\end{aligned}$$

und für $x \leq 0$ durch

$$\begin{aligned}|\sinh(x)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \\ &= |x| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \\ &\geq |x|.\end{aligned}$$

Mit $\sinh^2(\pi y) \geq \pi^2 y^2$ folgt somit

$$|v| = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{1+\frac{\sinh^2(\pi y)}{\pi^2}} \leq \sqrt{1+\frac{\sinh^2(\pi y)}{\pi^2}+\frac{\cos^2(\pi x)}{\pi^2}} \leq \sqrt{1+|w|^2} \leq 1+|w|$$

$\square$

1.5 Satz: *Lässt $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$ die Werte 0 und 1 aus, so gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$ mit folgenden Eigenschaften:*

1) $f = \frac{1}{2}[1+\cos\pi(\cos\pi g)]$ *und* $|g(0)| \leq 3+2|f(0)|$.
2) $|g(z)| \leq |g(0)| + \frac{\Theta}{\beta(1-\Theta)}$ *für alle z mit* $|z| \leq \theta$, $0 < \Theta < 1$ *und β wie in Def 1.2*

Beweis:
zu 1)
Nach dem Lemma (2.1) vom kleinem Picard existiert ein $\tilde{F} \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$, sodass gilt

$$\{1,-1\} \not\ni 2f-1 = \cos(\pi\tilde{F}).$$

Nun gibt es nach Lemma 1.4 b) ein $b \in \mathbb{C}$, sodass

$$2f(0)-1 = \cos\pi b \quad \text{und} \quad |b| \leq 1+|2f(0)-1| \leq 2|f(0)|+2.$$

Mit dem Lemma 1.4 a) erhält man aber

$$b = \pm\tilde{F}(0)+2k,\ k \in \mathbb{Z}, \quad \text{da} \quad \cos\pi b = 2f(0)-1 = \cos\pi\tilde{F}(0).$$

Für $F := \pm\tilde{F}+2k \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$ gilt nun $2f-1 = \cos\pi F$ und $b = F(0)$. Da F alle ganzzahligen Werte auslässt ($\{1,-1\} \not\ni 2f-1 = \cos\pi F \quad \Rightarrow \quad F \notin \mathbb{Z}$), gibt es ein $\tilde{g} \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$ mit $F = \cos\pi\tilde{g}$.
Nun gibt es nach Lemma 1.4 b) ein $a \in \mathbb{C}$, sodass

$$\cos\pi a = b \quad \text{und} \quad |a| \leq 1+|b| \leq 3+2|f(0)|$$

Außerdem gilt

$$\cos\pi a = b = F(0) = \cos\pi\tilde{g}(0).$$

Somit kann man wie bei $\tilde{F}$ zu einer Funktion $g := \pm\tilde{g}+2m,\ m \in \mathbb{Z}$ mit $g(0) = a$ und $F = \cos\pi g$ übergehen.

Also gilt

$$\begin{aligned}
& 2f-1=\cos\pi\tilde{F} \\
\Leftrightarrow\quad & 2f-1=\cos\pi(\pm F+2k) \\
\Leftrightarrow\quad & 2f-1=\cos\pi F \\
\Leftrightarrow\quad & 2f-1=\cos\pi(\cos\pi g) \\
\Leftrightarrow\quad & f=\frac{1}{2}\left(1+\cos\pi(\cos\pi g)\right)
\end{aligned}$$

und

$$|g(0)|=|a|\leq 3+2|f(0)|$$

Somit gilt 1.

zu 2)
Da für $g\in\mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$ die Relation $f=\frac{1}{2}[1+\cos\pi(\cos\pi g)]$ erfüllt ist, enthält $g(\mathbb{D})$ nach den Satz 2.2 aus dem Vortrag vom kleinen Picard keine Scheibe mit Radius 1.
Sei $0<\Theta<1$. Ist $g'(z)=0$ für ein $z\in\mathbb{D}$, dann erfüllt dieses z die Ungleichung

$$0=|g'(z)|\leq\frac{1}{\beta(1-\Theta)}$$

Sei also o.B.d.A. $g'(z)\neq 0$, dann gilt für $|z|\leq\Theta\quad d(z,\partial\mathbb{D})\geq 1-\Theta>0$. Somit enthält $g(\mathbb{D})$ nach der Folgerung 1.2 vom Satz von Bloch Bälle mit Radius $\beta(1-\Theta)|g'(z)|$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & \beta(1-\Theta)|g'(z)|\leq 1 \\
\text{also}\quad & |g'(z)|\leq\frac{1}{\beta(1-\Theta)}
\end{aligned}$$

Somit gilt für alle z mit $|z|\leq\Theta$

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^z g'(w)dw\right| &\leq \int_0^z |g'(w)|dw \\
&\leq \int_0^z \left|\frac{1}{\beta(1-\Theta)}\right| dw \\
&= \frac{|z|}{\beta(1-\Theta)} \\
&\leq \frac{\Theta}{\beta(1-\Theta)}.
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
& g(z)-g(0)=\int_0^z g'(w)dw \\
\Leftrightarrow\quad & g(z)=\int_0^z g'(w)dw+g(0) \\
\Rightarrow\quad & |g(z)|\leq\left|\int_0^z g'(w)dw\right|+|g(0)| \\
\Rightarrow\quad & |g(z)|\leq|g(0)|+\frac{\Theta}{\beta(1-\Theta)}.
\end{aligned}$$

Damit gilt 2.

□

Mit den eben bewiesenen Satz können wir nun einfach den Satz von Schottky folgern.

Beweis von Schottky:
Nun ergibt sich zusammen mit den beiden Ungleichungen $|\cos w| \leq e^{|w|}$ und $\frac{1}{2}|1+\cos w| \leq e^{|w|}$ aus Satz 1.5:

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \frac{1}{2}|[1+\cos\pi(\cos\pi g(z))]| \\
&\leq \exp[|\pi(\cos\pi g(z))|] \\
&\leq \exp[\pi(\exp(|\pi g(z))|)] \\
&\leq \exp[\pi(\exp(\pi\left[|g(0)|+\frac{\Theta}{\beta(1-\Theta)}\right]))] \\
&\leq \exp[\pi(\exp(\pi\left[(3+2|f(0)|)+\frac{\Theta}{\beta(1-\Theta)}\right]))]
\end{aligned}$$

Und wegen $|f(0)| \leq r$ folgt:

$$\leq L(\Theta, r)$$

□

2. Folgerungen aus den Satz von Schottky

Bevor wir mit Hilfe des Satzes von Schottky die Sätze Montel und Vitali verschärfen, wollen wir nocheinmal den kleinen Satz von Picard betrachten. Und erhalten eine Verschärfung.

2.1 Landaus Verschärfung des kleinen Picardschen Satzes
Es gibt eine auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ *definierte positive Funktion* $R(a)$*, sodass keine Funktion* $f \in \mathcal{O}(\overline{B(0, R(a))})$ *mit* $f(0) = a$ *und* $f'(0) = 1$ *existiert, welche die Werte 0 und 1 auslässt.*

Beweis: (durch Widerspruch)
Wir setzen $R(a) := 3L(\frac{1}{2}, |a|) = 3\exp[\pi(\exp(\pi(3 + 2|a|) + \frac{1}{\beta}]$.
Angenommen $f \in \mathcal{O}(\overline{B(0, R(a))})$ mit $f(0) = a$ und $f'(0) = 1$ lässt die Werte 0 und 1 aus.
Wir betrachten nun die Taylorentwicklung von f im Punkt 0

$$f(z) = a + z + \dots$$

Nun setzen wir $g(z) := f(R(a)z) = a + R(a)z + \dots \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$. Dann lässt $g(z)$ auch die Werte 0 und 1 aus.
Mit Schottky erhalten wir nun:

$$L\left(\frac{1}{2}, |a|\right) = \frac{1}{3}R(a) \geq |g(z)| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D} \text{ mit } \; |z| \leq \frac{1}{2}$$

Also auch

$$\frac{1}{3}R(a) \geq \max\left\{|g(z)| \;:\; |z| \leq \frac{1}{2}\right\}$$

Es gilt allerdings auch auf Grund der Cauchyschen Integralformel

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \max_{|z|=r} |g(z)| \quad \text{für } B(0, r) \subset\subset \overline{\mathbb{D}} \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Somit ergibt sich für $r \leq \frac{1}{2}$ und $n = 1$

$$R(a) = |R(a)| \leq 2\max\left\{|g(z)| \;:\; |z| \leq \frac{1}{2}\right\}$$

Dies ist ein Widerspruch, da $\frac{1}{2}R \not\leq \frac{1}{3}R$.

□

2.2 Definition: *Eine Folge* f_n *in* G *heißt* <u>*kompakt konvergent in G*</u>*, falls sie auf jeder kompakten Teilmenge* $A \subseteq G$ *gleichmäig konvergiert.*

Zur Erinnerung die Sätze von Montel und Vitali. Die Beweise lassen sich im Buch von R. Remmert „Funktionentheorie 2", $\S 7.1 - 7.3, S.147 - 158$ nachlesen.

2.3 Der Satz von Montel für Folgen
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ *ein Gebiet. Jede in* G *lokal beschränkte Folge* $f_0, f_1, f_2 \dots$ *von in* G *holomorphen Funktionen besitzt eine Teilfolge, die in* G *kompakt konvergiert.*

2.4 Definition: *Eine Familie* $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{O}(D)$ *heißt* <u>*lokal beschränkt in D*</u>*, wenn jeder Punkt* $z \in D$ *eine Umgebung* $U \subseteq D$ *besitzt, sodass* $\mathscr{F}$ *in* U *beschränkt ist.*

2.5 Satz von Vitali
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ *ein Gebiet und sei* $f_0, f_1, f_2 \dots$ *eine in* G *lokal beschränkte Folge von Funktionen* $f_n \in \mathcal{O}(G)$*. Die Menge* A:=$\{w \in G \;:\; \lim f_n(w) \text{ existiert in } \mathbb{C}\}$ *der Konvergenzpunkte dieser Folge habe wenigstens einen Häufungspunkt in* G*. Dann konvergiert die Folge* $f_0, f_1, f_2 \dots$ *kompakt in* G*.*

Kommen wir nun zu den Verschärfungen der beiden Sätze. Doch zuvor noch einen Satz zur Vorbereitung.

2.6 Satz
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ *ein Gebiet und* $\mathscr{F} := \{f \in \mathcal{O}(G) \;:\; f \text{ lässt die Werte 0 und 1 aus}\}$*. Seien* $w \in G, r \in (0, \infty)$ *und* $\mathscr{F}_*$ *eine Teilfamilie von* $\mathscr{F}$*, sodass* $|g(w)| \leq r$ *für alle* $g \in \mathscr{F}_*$*. Dann gilt:*

(1) *Es gibt eine Umgebung U von w, sodass $\mathscr{F}_*$ in U beschränkt ist.*

(2) *Sei $\mathscr{F}_1 := \{f \in \mathscr{F} \ : \ |f(p)| \leq 1\}, p \in G$. Die Familie $\mathscr{F}_1$ ist lokal beschränkt in G.*

Beweis:
zu (1)
Sei $B(w, 2t) \subseteq G, t > 0$. Durch eventuelle Translation und Reskalierung können wir $w = 0$ und $2t = 1$ annehmen. Somit gilt für alle $g \in \mathscr{F}_*$ $|g(0)| \leq r, r \in (0, \infty)$. Also $\mathscr{F}_* \subseteq S(r)$, da $g \in \mathcal{O}(G)$, also insbesondere $g \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$
Somit gilt nach Schottky:

$$|g(z)| \leq L\left(\frac{1}{2}, r\right) \quad \text{für alle } |z| \leq \frac{1}{2}$$

Da dies für jedes $g \in S(r)$ gilt, folgt

$$\sup\left\{|g|_{B(0,\frac{1}{2})} \ : \ g \in \mathscr{F}_*\right\} \leq L\left(\frac{1}{2}, r\right) < \infty$$

Setzen wir nun $U := B(w, t)$, dann ist $\mathscr{F}_*$ in U beschränkt.
zu (2)
Die Menge $W := \{w \in G \ : \ \mathscr{F}_1 \text{ ist beschränkt um } w\}$ ist offen in G. Nach (1) folgt, dass $p \in W$.
Angenommen $W \neq G$, dann gäbe es einen Punkt $v \in G \cap \partial W$ und eine Folge $f_n \in \mathscr{F}_1$ mit $\lim f_n(v) = \infty$. Wir setzen nun $g_n := \frac{1}{f_n} \in \mathscr{F}$, dann ist $\lim g_n(v) = 0$. Somit ist die Familie $\{g_n \ : \ n \in I\!N\}$ nach (1) beschränkt um v.
Nach Montel konvergiert nun eine Teilfolge g_{n_k} in G kompakt gegen ein $g \in \mathcal{O}(G)$. Da alle g_n nullstellenfrei sind und $g(v) = 0$, folgt nach Hurwitz $g \equiv 0$. Dann gilt aber $\lim f_{n_k}(z) = \infty$ auch in Punkten $z \in W$.
Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, womit also $G = W$ gilt.
Damit ist aber $\mathscr{F}_1$ lokal beschränkt in G.

□

2.7 Definition: *Eine Familie $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{O}(G)$ heißt normal in G, falls jede Folge von Funktionen aus $\mathscr{F}$ eine Teilfolge besitzt, die kompakt in G oder gegen ∞ konvergiert .*

2.8 Bemerkung: *Jede in G lokal beschränkte Familie $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{O}(G)$ ist normal in G.*

Beweis:
Folgt direkt aus 2.4 den Satz von Montel für Folgen.

□

2.9 Verschärfung des Satzes von Montel
Die Familie $\mathscr{F}$ ist normal in G.

Beweis:
Sei f_n eine Folge aus $\mathscr{F}$. Hat f_n Teilfolgen in $\mathscr{F}_1$, so folgt die Behauptung aus den Satz 2.6 (2) und der Bemerkung.
Liegen hingegen nur endlich viele f_n in $\mathscr{F}_1$, so liegen fast alle $\frac{1}{f_n}$ in $\mathscr{F}_1$. Wir wählen nun eine Teilfolge g_n aus $\frac{1}{f_n}$, die in G gegen g kompakt konvergiert. Ist $\lim g_n$ nullstellenfrei, so konvergiert die Teilfolge $\frac{1}{g_n}$ der Folge f_n in G kompakt gegen $\frac{1}{g}$.
Hat g Nullstellen, so folgt wieder nach Hurwitz $g \equiv 0$ und somit konvergiert $\frac{1}{g_n}$ kompakt gegen ∞.
Somit ist $\mathscr{F}$ normal in G.

□

Nun erhalten wir hieraus noch eine Verschärfung des VITALIschen Satzes.

2.10 Satz von Carathéodory-Landau
Seien $a, b \in \mathbb{C}, a \neq b$ und $f_1, f_2, \ldots : G \to \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ eine Folge holomorpher Abbildungen. Weiter existiere $\lim f_n(w) \in \mathbb{C}$ für eine Menge von Punkten $w \in G$, die mindestens einen Häufungspunkt in G hat. Dann konvergiert die Folge f_n kompakt in G.

Beweis:
Wir können wieder $a = 0$ und $b = 1$ annehmen. Dann ist die Folge $f_n \in \mathscr{F}$. Da $\lim f_n(w)$ für mindestens ein $w \in G$ existiert, gilt hierfür $|f_n(w)| \leq r$ für $r \in (0, \infty)$. Sei nun

$\mathscr{F}_r := \{f \in \mathscr{F} \;:\; |f(w)| \leq r\}$. Dann ist $\{f_n\} \subseteq \mathscr{F}_r$. Nun ist $\mathscr{F}_r$ nach 2.6 (2) lokal beschränkt in G. Nun erhalten wir mit 2.5 den Satz von Vitali die Behauptung.

□

3. Der Große Satz von Picard

3.1 Der Große Satz von Picard *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte wesentliche Singularität von f. Dann nimmt f in jeder Umgebung von z_0 jede komplexe Zahl - mit höchstens einer Ausnahme - unendlich oft als Wert an.*

3.2 Bemerkung: *Dies ist eine Verschärfung des kleinen Picardschen Satzes:*
Jede ganze transzendente Funktion f nimmt jede komplexe Zahl - mit höchstens einer Ausnahme - unendlich oft als Wert an.

Beweis: (Durch Widerspruch)
O.B.d.A sei $z_0 = 0$. Wir nehmen an, dass f auf $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ jeden Wert mit Ausnahme von 0 und 1 annimmt. Dann nehmen die Funktionen $g_n(z) := f(\frac{z}{n})$ die Werte 0 und 1 auch nicht an und sind in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ holomorph. Dann ist nach der Verschärfung von Montel $\{g_n\}$ normal in $\mathbb{D}$. Somit gibt es eine Teilfolge g_{n_k} von g_n die entweder kompakt gegen eine holomorphe Grenzfunktion g oder gegen Unendlich konvergiert.

Fall 1: Sei g die holomorphe Grenzfunktion von g_{n_k}.
Nach Montel ist $\{g_n\}$ lokal beschränkt in $\mathbb{D}$. Es gibt also ein $r \in (0,1)$ und ein $M > 0$, sodass $|g(z)| \leq M$ für $|z| = r$. Da g_{n_k} kompakt konvergiert, muss es schon ein $N \in I\!N$ geben, sodass $|g_{n_k}(z)| \leq 2M$ für $|z| = r$ und $n_k \geq N$. Aber dann ist $|f(z)| \leq 2M$ für $|z| = \frac{r}{n_k}$ und $n_k \geq N$. Nach den Maximumsprinzip ist $|f(z)| \leq 2M$ für $\frac{r}{n_k} \leq |z| \leq \frac{r}{N}$. Somit ist f um 0 beschränkt, was ein Widerspruch dazu ist, dass $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität ist.

Fall 2: Sei $g(z) \equiv \infty$.
Wir betrachten die Funktionenfolge $\frac{1}{g_n}$. Dann gilt $\lim \frac{1}{g_n}(z) = 0$, somit ist $\{\frac{1}{g_n}\}$ wieder lokal beschränkt. Analog zum Fall 1 folgt dann, dass $\frac{1}{f}$ um 0 beschränkt ist. Wodurch $z_0 = 0$ eine Polstelle von f ist. Dies ist jedoch ein Widerspruch.
Damit folgt die Behauptung.

□