Der Satz von Bloch

Florian Noethen

24. September 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Vorstellung des Themas	2
1.1	Satz von Bloch (1924)	2
1.2	Verallgemeinerung des Satzes auf beliebige holomorphe Funktionen	2
1.3	Aussage über den Bildbereich einer ganzen Funktion als Folgerung des Satzes	3
2	Erster Beweis des Satzes von Bloch	3
2.1	Topologische Aussage über die Größe des Bildbereichs einer Familie von Funktionen	3
2.2	Hilfslemma	3
2.3	Beweis des Satzes von Bloch	4
3	Zweiter Beweis des Satzes von Bloch	5
3.1	Verschärfung des Satzes von Bloch	5
4	Dritter Beweis des Satzes von Bloch	6
4.1	Definition eines schlichten Balles	6
4.2	Satz von Ahlfors (1938)	6
4.3	Biholomorphiekriterium	6
4.4	Hilfslemma	7
4.5	Genauere Aussage über den Bildbereich einer ganzen Funktion	7
5	Konsequenzen aus dem Satz von Bloch	8
6	Anhang	9
6.1	Erste Hilfsbehauptung	9
6.2	Zweite Hilfsbehauptung	9
6.3	Beweis des Hilfslemmas in 4.4	10

1 Vorstellung des Themas

In diesem Vortrag wird der Satz von Bloch¹ vorgestellt, der eine erstaunliche Aussage über holomorphe Funktionen macht. Der Vortrag folgt dem Buch: R. Remmert, "Funktionentheorie 2", §10.1, S.223-231. Bevor wir uns dem Satz widmen, wollen wir an dieser Stelle noch ein paar Formalismen festlegen:

Im wesentlichen werden die Bezeichnungen der Vorlesung über Funktionentheorie vom letzten Semester übernommen. Zusätzlich bezeichnen wir mit

$$\mathcal{O}(D) := \{f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ auf Umgebung } \mathcal{U} \text{ von } D \text{ holomorph}\}$$

für eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$.

1.1 Satz von Bloch (1924)

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $f'(0) = 1$.

Dann enthält $f(\mathbb{D})$ Bälle vom Radius $\frac{3}{2} - \sqrt{2} > \frac{1}{12}$.

Dabei kann man im allgemeinen nicht $f(0)$ als Mittelpunkt des Balles wählen, wie die Funktionen $f_n(z) := \frac{e^{nz}-1}{n}$ veranschaulichen. Sie erfüllen die Voraussetzungen des Satzes, nehmen an der Stelle 0 den Wert 0 an, lassen aber den Wert $-\frac{1}{n}$ aus.

Als einfache Folgerung aus dem Satz erhält man:

1.2 Folgerung

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(G)$, $c \in G$ und $f'(c) \neq 0$.

Dann enthält $f(G)$ Bälle vom Radius $\frac{1}{12}s |f'(c)|$, $0 < s < \text{dist}(c, \partial G)$.

Beweis:

O.B.d.A. sei $c = 0$. Betrachte die Funktion $g(z) := \frac{f(sz)}{sf'(0)}$ für s wie in der Behauptung. Dann ist $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $g'(0) = 1$. Mit dem Satz von Bloch folgt nun für ein $p \in \mathbb{C}$

$$B\left(p, \frac{1}{12}\right) \subseteq g(\mathbb{D}) = \frac{1}{sf'(0)}f(s\mathbb{D}) \subseteq \frac{1}{sf'(0)}f(G).$$

Hieraus folgt die Behauptung, denn

$$B\left(sf'(0)p, \frac{1}{12}s|f'(0)|\right) \subseteq f(G).$$

□

Aus dieser Folgerung erhält man sofort:

¹André Bloch (1893-1948) war ein französischer Mathematiker, der vor allem aufgrund seiner Entdeckungen in der Funktionentheorie bekannt wurde.

1.3 Folgerung

Das Bild einer nicht-konstanten, ganzen Funktion enthält Bälle von jedem Radius.

Im Folgenden wollen wir verschiedene Beweisstrategien des Satzes diskutieren.

2 Erster Beweis des Satzes von Bloch

Zuerst werden wir ein paar Vorbereitungen machen, um auf den Satz hinzuarbeiten.

2.1 Satz

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ eine beschränkte Teilmenge, $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $f|_G : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine offene Abbildung und $a \in G$ mit $s := \min_{z \in \partial G} |f(z) - f(a)| > 0$.

Dann gilt $B(f(a), s) \subseteq f(G)$.

Beweis:

Da $\partial f(G)$ kompakt ist, existiert ein $w_* \in \partial f(G)$ mit $\text{dist}(\partial f(G), f(a)) = |w_* - f(a)|$. Nun finden wir eine Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in G mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w_*$. Aufgrund der Kompaktheit von $\overline{G}$ können wir sogar annehmen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_*$ für ein $z_* \in \overline{G} = \partial G \cup G$. Aus der Stetigkeit von f folgt $f(z_*) = w_*$. Da $f|_G$ eine offene Abbildung ist, muss $z_* \in \partial G$ sein. Somit haben wir $\text{dist}(\partial f(G), f(a)) \geq s$ und $B(f(a), s) \subseteq f(G)$.

□

Insbesondere wissen wir aus dem Satz der offenen Abbildung, dass nicht-konstante, holomorphe Funktionen offene Abbildungen definieren. Mit dieser Tatsache erhalten wir folgendes Lemma:

2.2 Lemma

Sei $f \in \mathcal{O}(V)$ nicht-konstant mit $V := B(a, r)$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, und $|f'|_V \leq 2|f'(a)|$.

Dann ist $B(f(a), R) \subseteq f(V)$ mit $R := \underbrace{(3 - 2\sqrt{2})r}_{> \frac{1}{6}} |f'(a)|$.

Beweis:

Durch eventuelle Translation können wir $a = f(a) = 0$ annehmen. Definiere nun A durch $A(z) := f(z) - f'(0)z$. Dann ist $A \in \mathcal{O}(V)$ und es gilt

$$A(z) = \int_0^z (f'(w) - f'(0))dw.$$

Es folgt

$$|A(z)| \leq \int_0^1 |f'(zt) - f'(0)||z|dt.$$

Mit dem Residuensatz erhalten wir für $v \in V$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{vf'(w)}{w(w-v)} dw &= \operatorname{Res} \left(\frac{vf'(w)}{w(w-v)}, w=0 \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{vf'(w)}{w(w-v)}, w=v \right) \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{vf'(w)}{w-v} + \lim_{w \rightarrow v} \frac{vf'(w)}{w} = f'(v) - f'(0). \end{aligned}$$

Mit der Standardabschätzung für Kurvenintegrale erhalten wir

$$|f'(v) - f'(0)| \leq \frac{|v|}{r-|v|} |f'|_V$$

und somit

$$|A(z)| \leq \int_0^1 \frac{t|z|^2}{r-t|z|} |f'|_V dt \leq \int_0^1 \frac{t|z|^2}{r-|z|} |f'|_V dt = \frac{1}{2} \frac{|z|^2}{r-|z|} |f'|_V.$$

Sei $\rho \in (0, r)$. Für z mit $|z| = \rho$ kann man nun aus der letzten Ungleichung und $|f'|_V \leq 2|f'(0)|$ folgern, dass

$$|f(z)| \geq |f'(0)z| - |A(z)| \geq |f'(0)z| - \frac{1}{2} \frac{|z|^2}{r-|z|} |f'|_V \geq \underbrace{\left(\rho - \frac{\rho^2}{r-\rho} \right)}_{=: \alpha(\rho)} |f'(0)|.$$

Durch elementares Nachrechnen sieht man, dass die Funktion $\alpha(\rho)$ ihr Maximum in $(0, r)$ an der Stelle $\rho_* := \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)r$ mit dem Wert $(3 - 2\sqrt{2})r$ annimmt. Wir haben also

$$\forall |z| = \rho_* : |f(z) - f(0)| = |f(z)| \geq (3 - 2\sqrt{2})r |f'(0)| = R.$$

Mit $G := B(0, \rho_*)$ in dem vorherigen Satz folgt

$$B(0, R) \subseteq f(G) \subseteq f(V).$$

□

Wir ordnen nun jedem $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$ die in $\overline{\mathbb{D}}$ stetige Funktion $|f'(z)|(1-|z|)$ zu. Diese nimmt in einem Punkt $p \in \mathbb{D}$ ihr Maximum M an.

Der Satz von Bloch ist ein Spezialfall von folgendem Satz:

2.3 Satz

Sei $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$ nicht-konstant.

Dann enthält $f(\mathbb{D})$ den Ball $B(f(p), (\frac{3}{2} - \sqrt{2})M)$.

Beweis:

Setze $t := \frac{1}{2}(1-|p|)$. Es gelten folgende Identitäten

$$M = 2t|f'(p)|, \quad B(p, t) \subseteq \mathbb{D}, \quad \forall z \in B(p, t) : t \leq 1 - |z|.$$

Letztere folgt aus: $|z| \leq |z-p| + |p| \leq t + |p| = 1-t$. Für $z \in B(p, t)$ folgt aus $|f'(z)|(1-|z|) \leq M$, dass

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{1-|z|} \leq \frac{M}{t} = 2|f'(p)|.$$

Mit dem vorherigen Lemma folgt schließlich $B(f(p), R) \subseteq f(B(p, t)) \subseteq f(\mathbb{D})$, wobei R der Radius aus der Behauptung ist.

□

3 Zweiter Beweis des Satzes von Bloch

Statt der Hilfsfunktion $|f'(z)|(1-|z|)$ wollen wir hier die Hilfsfunktion $|f'(z)|(1-|z|^2)$ motivieren, die 1929 von Landau² eingeführt wurde. In der Hoffnung eine bessere Schranke für den Satz von Bloch zu finden, lösen wir eine Extremalaufgabe:

Gesucht ist eine Funktion $F \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$ mit $f(\mathbb{D}) = F(\mathbb{D})$ und betragsmäßig möglichst großer Ableitung in 0.

Dafür beschränken wir uns auf die Familie $\mathcal{F} := \{f \circ j \mid j \in \text{Aut}(\mathbb{D})\}$. An dieser Stelle erinnern wir uns, dass die Automorphismengruppe des Einheitskreises gerade die Einschränkungen der Möbiustransformationen der Form

$$j(z) = e^{i\phi} \frac{z - w}{\bar{w}z - 1}$$

mit $w \in \mathbb{D}$ und $\phi \in \mathbb{R}$ auf $\mathbb{D}$ sind. Man rechnet nach, dass $|j'(0)| = 1 - |w|^2$. Für alle $h \in \mathcal{F}$ gilt $h(\mathbb{D}) = f(\mathbb{D})$ und $|h'(0)| = |f'(w)|(1 - |w|^2)$ für ein $w \in \mathbb{D}$. Da $|f'(w)|(1 - |w|^2)$ auf $\overline{\mathbb{D}}$ stetig ist, nimmt die Funktion in einem Punkt $q \in \mathbb{D}$ ihr Maximum N an. Somit liefert uns $F = f \circ i$ mit $i(z) := \frac{z-q}{\bar{q}z-1}$ eine Lösung des Extremalproblems in $\mathcal{F}$. Es ist $F(0) = f(q)$ und $|F'(0)| = N$. Da $\text{Aut}(\mathbb{D})$ eine Gruppe ist, ist $\mathcal{F} = \{F \circ j \mid j \in \text{Aut}(\mathbb{D})\}$ und wir haben für alle $j = j_w \in \text{Aut}(\mathbb{D})$

$$N \geq |(F \circ j)'(0)| = |F'(w)|(1 - |w|^2).$$

Also ist

$$\forall z \in \mathbb{D} : |F'(z)| \leq \frac{N}{1 - |z|^2}$$

und spezieller erhalten wir daraus

$$\forall |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} : |F'(z)| \leq 2|F'(0)|.$$

Mit dieser Vorbereitung lässt sich die zweite Variante des Satzes von Bloch beweisen.

3.1 Satz

Sei $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$ nicht-konstant und $q \in \mathbb{D}$ sowie $N > 0$ wie zuvor.

Dann enthält $f(\mathbb{D})$ den Ball um $f(q)$ vom Radius $\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2\right)N$.
(vorher: $(\frac{3}{2} - \sqrt{2})M$ mit $M \leq N$)

Beweis:

Sei F wie oben gewählt. Dann ist nach dem Lemma 2.2 der Ball um $F(0) = f(q)$ vom Radius $(3 - 2\sqrt{2})\frac{1}{\sqrt{2}}|F'(0)| = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2\right)N$ enthalten in $F\left(B\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \subseteq F(\mathbb{D}) = f(\mathbb{D})$.

□

Der Raum

$$\mathcal{B} := \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \mid \sup_{z \in \mathbb{D}} |f'(z)|(1 - |z|^2) < \infty \right\}$$

²Edmund Georg Hermann Landau (1877-1938) war ein deutscher Mathematiker, der sich überwiegend mit der theoretischen Mathematik, im Speziellen der analytischen Zahlentheorie, befasst hat.

wird Blochraum genannt und seine Elemente mit Bloch-Funktionen bezeichnet. Man kann zeigen, dass $\mathcal{B}$ zusammen mit $\|f\|_{\mathcal{B}} := |f(0)| + \sup_{z \in \mathbb{D}} |f'(z)|(1 - |z|^2)$ ein $\mathbb{C}$ -Banachraum ist und $\|f\|_{\mathcal{B}} \leq 2\|f\|_{\mathbb{D}}$ gilt. (Tipp: Für die Ungleichung wende man das Lemma von Schwarz und Pick auf $\frac{f}{\|f\|_{\mathbb{D}}}$ an.)

4 Dritter Beweis des Satzes von Bloch

Als nächstes wollen wir den Satz von Bloch nochmals verschärfen. Dafür definieren wir zuerst einen neuen Begriff:

4.1 Definition

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$. Ein Ball $B \subseteq f(G)$ heißt schlicht (bezüglich f), wenn es ein Gebiet $G^* \subseteq G$ gibt, das durch f biholomorph auf B abgebildet wird.

Die nächste Version des Satzes von Bloch stammt von Ahlfors³.

4.2 Satz von Ahlfors (1938)

Sei $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$ nicht-konstant und $N := \max_{z \in \mathbb{D}} |f'(z)|(1 - |z|^2)$.

Dann enthält $f(\mathbb{D})$ schlichte Bälle vom Radius $\frac{\sqrt{3}}{4}N$. ($\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,433$)

Der Beweis bedarf als Vorbereitung noch zweier Lemmata.

4.3 Lemma

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, $h \in \mathcal{O}(G)$ und $\operatorname{Re} h'(z) > 0$ für alle $z \in G$.

Dann ist $h : G \rightarrow h(G)$ biholomorph.

Beweis:

Seien $u, v \in G$ mit $u \neq v$. Dann liegt die Verbindungsstrecke $\gamma(t) := u + (v - u)t$ für $0 \leq t \leq 1$ in G . Nach Definition des Kurvenintegrals ist nun

$$h(v) - h(u) = \int_{\gamma} h'(z) dz = (v - u) \left(\int_0^1 \operatorname{Re} h'(\gamma(t)) dt + i \int_0^1 \operatorname{Im} h'(\gamma(t)) dt \right)$$

Weil $\operatorname{Re} h'(z) > 0$ nach Voraussetzung, ist $h(v) \neq h(u)$ und somit h injektiv. Die Behauptung folgt nun direkt aus dem Biholomorphiesatz.

□

³Lars Valerian Ahlfors (1907–1996) war ein finnisch-US-amerikanischer Mathematiker, der im Bereich der Analysis und Funktionentheorie wirkte. 1936 wurde er mit der Fields-Medaille ausgezeichnet.

4.4 Lemma

Sei $F \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $|F'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2}$ und $F'(0) = 1$.

Dann gilt für alle z mit $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\operatorname{Re} F'(z) \geq \frac{1 - \sqrt{3}|z|}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}|z|\right)^3} \geq 0$$

Der Beweis dieses Lemmas ist eher technisch und zeitaufwendig. Deshalb möchte ich an dieser Stelle im Vortrag darauf verzichten und stattdessen den Beweis im Anhang für Interessenten bereitstellen.

Widmen wir uns nun dem Beweis des Satzes von Ahlfors:

Beweis des Satzes:

Durch eventuelle Normierung von f können wir annehmen, dass $N = 1$. Sei F wie im Abschnitt 3 gewählt. Wir wissen bereits, dass $|F'(0)| = 1$ also $F'(0) = \eta$ für ein $\eta \in S^1$. Betrachte nun $\tilde{F}(z) := \eta^{-1}F(z)$. Es ist $\tilde{F}'(0) = 1$ und nach Abschnitt 3 gilt $|\tilde{F}'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2}$ für $z \in \mathbb{D}$. Nach Lemma 4.4 ist nun $\operatorname{Re} \tilde{F}'(z) > 0$ in $B := B(0, \rho)$ mit $\rho := \frac{1}{\sqrt{3}}$. Aus Lemma 4.3 erhalten wir jetzt, dass $\tilde{F}|_B : B \rightarrow \tilde{F}(B)$ biholomorph ist. Für $\xi = \rho e^{i\phi} \in \partial B$ erhalten wir dann

$$|\tilde{F}(\xi) - \tilde{F}(0)| = \left| \int_0^\rho \tilde{F}'(te^{i\phi}) dt \right| \geq \int_0^\rho \operatorname{Re} \tilde{F}'(te^{i\phi}) dt \geq \int_0^\rho \frac{1 - \sqrt{3}t}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}t\right)^3} dt = \frac{\sqrt{3}}{4}.^4$$

Nach Satz 2.1 ist nun $B\left(\tilde{F}(0), \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \subseteq \tilde{F}(B)$. Da $f = \eta\tilde{F} \circ j$ für ein $j \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$, bildet f das Gebiet $G := j^{-1}(B) \subseteq \mathbb{D}$ biholomorph auf $\eta\tilde{F}(B)$ ab. Nun enthält $\tilde{F}(B)$ und somit auch $\eta\tilde{F}(B) = f(G)$ einen Ball vom Radius $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

□

Wie im Abschnitt 1 erhält man:

4.5 Folgerung

Das Bild einer nicht-konstanten, ganzen Funktion enthält schlichte Bälle von jedem Radius.

Genauer noch besagt der kleine Satz von Picard, dass der Bildbereich einer nicht-konstanten ganzen Funktion höchstens einen Wert auslässt. Dies ist aber Gegenstand des nächsten Vortrags.

⁴Das letzte Integral berechnet man am besten mit der Stammfunktion $\frac{9\sqrt{3}(2-\sqrt{3}t)}{(\sqrt{3}t-3)^2}$ von $\frac{1-\sqrt{3}t}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)^3}$, die auf $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{3}\}$ definiert ist.

5 Konsequenzen aus dem Satz von Bloch

Der Satz von Bloch und seine verschiedenen Varianten bewegten Landau dazu Konstanten einzuführen, die er selbst als "Weltkonstanten" bezeichnete. Sei

$$\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}) \mid f'(0) = 1\}.$$

Für $h \in \mathcal{F}$ bezeichnen wir mit L_h bzw. B_h den Radius des größten Balles bzw. schlichten Balles, der in $h(\mathbb{D})$ enthalten ist. Man bezeichnet

$$L := \inf\{L_h \mid h \in \mathcal{F}\}, \quad B := \inf\{B_h \mid h \in \mathcal{F}\}$$

als die Landausche bzw. Blochsche Konstante. Entsprechend definiert man die Konstanten A_h und A für die Familie

$$\mathcal{F}^* := \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ injektiv}\}.$$

Trivialer Weise ist $B \leq L \leq A$. Genaue Werte der drei Konstanten sind bisher nicht bekannt. Einer unteren Schranke von B haben wir uns bereits durch den Satz von Ahlfors angenähert. Es gilt $B \geq \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,4330$. Betrachtet man die Funktion $g(z) := \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$ mit dem Hauptzweig des Logarithmus, so stellt man fest, dass $g'(0) = 1$ und g den Einheitsball biholomorph auf den Streifen $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}\}$ abbildet. Somit ist $A \leq A_g = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854$. (Streng genommen ist $g \notin \mathcal{F}^*$, da g in ± 1 nicht stetig fortsetzbar ist. Durch Grenzwertbetrachtung der Funktionen $g_\epsilon(z) := \frac{1}{1-\epsilon} g((1-\epsilon)z)$ für $\epsilon \searrow 0$ erhält man jedoch approximativ $A \leq \frac{\pi}{4}$.) Wir haben also gezeigt

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leq B \leq L \leq A \leq \frac{\pi}{4}.$$

Es wurden sogar noch bessere Abschätzungen⁵ gezeigt:

$$0,4332 < B < 0,4719, \quad 0,5000 < L < 0,5433$$

Eine bisher ungelöste Vermutung von Ahlfors/Grunsky⁶ (1936) besagt:

$$B = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \sqrt{1 + \sqrt{3}}} = 0,4718\dots$$

⁵Hier beziehen wir uns auf: http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Bloch, 08.09.2013

⁶Helmut Grunsky (1904-1986) war ein deutscher Mathematiker, der sich mit der Funktionentheorie beschäftigte.

6 Anhang

Wir wollen das Lemma 4.4 beweisen. Für den Beweis brauchen wir noch zwei Hilfsaussagen.

6.1 Hilfsaussage

Sei $z := p(w) := \sqrt{3} \frac{1-w}{3-w}$ und $q(w) := \frac{9}{4} w \left(1 - \frac{1}{3} w\right)^2$.

Dann ist $p(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, p bildet $[0, 1]$ bijektiv auf $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ ab, $q(p^{-1}(z)) = \frac{1-\sqrt{3}z}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}z\right)^3}$ und $\forall w \in \partial\mathbb{D} : |q(w)|(1 - |p(w)|^2) = 1$.

Beweis:

Der Beweis ist ein einfaches Nachrechnen der Eigenschaften. Dabei benutzt man, dass p eine Möbiustransformation ist, und kann bei der letzten Gleichung beispielsweise verwenden, dass $|z|^2 = |z\bar{z}|$ sowie $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$.

□

6.2 Hilfsaussage

Für $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $h'(0) = 1$ und $|h'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2}$ gilt $h''(0) = 0$.

Beweis:

Es gilt

$$\int_0^z h'(w) dw = h(z) - h(0) = z + az^2 + O(z^3)$$

als Potenzreihe um 0. Für $z = re^{i\phi}$ erhalten wir dann

$$|z + az^2 + O(z^3)| \leq \int_0^r |h'(e^{i\phi}t)| dt \leq \int_0^r \frac{1}{1-t^2} dt = \int_0^r (1 + O(t^2)) dt = r + O(r^3) = |z| + O(|z|^3).$$

Für betragsmäßig kleine z ist $O(|z|^3) \leq c_1|z|^3$ und $|O(z^3)| \leq c_2|z|^3$ für Konstanten $c_1, c_2 > 0$. Also folgt mit $c := c_1 + c_2$

$$|z + az^2| \leq |z| + O(|z|^3) + |O(z^3)| \leq |z| + c|z|^3$$

für betragsmäßig kleine z . Somit gilt $|1 + az| \leq 1 + c|z|^2$. Mit $z = r\bar{a}$ und $r > 0$ klein genug erhalten wir

$$r|a|^2 \leq \tilde{c}r^2$$

für eine positive reelle Konstante $\tilde{c}$. Im Grenzwert $r \searrow 0$ folgt dann $a = 0$. Schließlich $h''(0) = 2a = 0$.

□

Als nächstes der Beweis des Lemmas:

6.3 Lemma

Sei $F \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $|F'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2}$ und $F'(0) = 1$.

Dann gilt für alle z mit $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\operatorname{Re} F'(z) \geq \frac{1 - \sqrt{3}|z|}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}|z|\right)^3} \geq 0$$

Beweis:

Definiere die Funktion

$$H(w) := \left(\frac{F'(p(w))}{q(w)} - 1 \right) \frac{w}{(1-w)^2}.$$

Wegen $p(\overline{\mathbb{D}}) \subseteq \mathbb{D}$ und da q nur eine einfache Nullstelle in 0 hat, ist H auf $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ holomorph. Nach der Hilfsaussage 6.2 ist $F''(0) = 0$. Mit diesem Wissen rechnet man unter Verwendung des Satzes von L'Hospital nach, dass der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow 1} H(z)$ existiert. Somit ist $H \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$. Für

$w = e^{i\phi} \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ ist

$$\frac{w}{(1-w)^2} = \frac{e^{i\phi} e^{-i\phi}}{(1 - e^{i\phi})^2 (e^{-i\frac{\phi}{2}})^2} = \frac{1}{\left(2i \frac{1}{2i} (e^{i\frac{\phi}{2}} - e^{-i\frac{\phi}{2}})\right)^2} = -\frac{1}{4 \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} \leq -\frac{1}{4}$$

reell und strikt negativ. Daher ist

$$\operatorname{Re} H(w) = \underbrace{\frac{w}{(1-w)^2}}_{< 0} \operatorname{Re} \left(\frac{F'(p(w))}{q(w)} - 1 \right)$$

für solche w . Wegen $|F'(z)|(1-|z|^2) \leq 1$ und $1 = |q(w)|(1-|p(w)|^2)$ für alle $w \in \partial\mathbb{D}$, folgt mit $z = p(w)$

$$\left| \frac{F'(p(w))}{q(w)} \right| \leq 1.$$

Da $\operatorname{Re}(a-1) \leq 0$ für alle $a \in \overline{\mathbb{D}}$ folgt nun $\operatorname{Re} H(w) \geq 0$ für alle $w \in \partial\mathbb{D}$. Nach dem Maximumsprinzip gilt nun $\operatorname{Re} H(w) \geq 0$ für alle $w \in \overline{\mathbb{D}}$. Mit $q(w) \geq 0$ und $\frac{w}{(1-w)^2} > 0$ für $w \in (0, 1)$ folgt aus $\operatorname{Re} H(w) \geq 0$

$$\forall w \in [0, 1] : \operatorname{Re} F'(p(w)) \geq q(w).$$

Da p das Intervall $[0, 1]$ bijektiv auf $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ abbildet, folgt nun aus der Hilfsaussage 6.1

$$\forall z \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] : \operatorname{Re} F'(z) \geq q(p^{-1}(z)) = \frac{1 - \sqrt{3}|z|}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}|z|\right)^3}.$$

Dies beweist das Lemma für nicht-negative, reelle z . Für jedes $\phi \in \mathbb{R}$ erfüllt $F_\phi(z) := e^{-i\phi} F(e^{i\phi} z)$ die Voraussetzungen des Lemmas. Es gilt $F'_\phi(z) = F'(e^{i\phi} z)$. Aus dem bisherigen Beweis erhalten wir:

$$\forall z \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] : \operatorname{Re} F'(e^{i\phi} z) = \operatorname{Re} F'_\phi(z) \geq \frac{1 - \sqrt{3}|z|}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}|z|\right)^3}$$

Insgesamt folgt nun die Behauptung des Lemmas für alle z mit $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

□