Seminar Funktionentheorie, WiSe 13/14, Herr Prof. Latschev

Gruppenwirkungen auf Riemannschen Flächen und der Satz von Hurwitz

1 endliche Gruppenwirkungen

Sei G eine Gruppe und X eine Riemannsche Fläche.

- Eine **Wirkung** von G auf X ist eine Abbildung $G \times X \to X$, welche wir mir $(q, p) \to q \cdot p$ bezeichnen, für die gilt:

  a) $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$ für $g, h \in G$, $p \in X$ und

  b) $e \cdot p = p$ für $p \in X$ und $e \in G$ neutrales Element.

  (Technisch gesehen ist dies nur eine Linkswirkung)
  Für fixes $g \in G$ ist die Abbildung, die p nach $g \cdot p$ schickt, eine Bijektion, seine Inverse ist die Abbildung $p \to g^{-1} \cdot p$.

- Die **Bahn** eines Punktes $p \in X$ ist die Menge $G \cdot p = \{g \cdot p \mid g \in G\}$. Für $A \subset X$ beliebige Teilmenge bezeichnen wir mit $G \cdot A$ die Menge der Bahnen von Punkten in A: $G \cdot A = \{g \cdot a \mid g \in G, a \in A\}$.

- Der **Stabilisator** eines Punktes $p \in X$ ist die Untergruppe $G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}$ (auch Isotropiegruppe von p genannt).
  Beachte: Punkte in der gleichen Bahn haben konjugierte Stabilisatoren: $G_{g \cdot p} = gG_pg^{-1}$.
  Wenn G endlich ist, gilt: $|G \cdot p| \cdot |G_p| = |G|$.

- Der **Kern** einer Wirkung von G auf X ist die Untergruppe $K = \{g \in G \mid g \cdot p = p \ \forall p \in X\}$. Der Kern ist der Schnitt aller Stabilisatoren. Er ist ein Normalteiler von G und die Faktorengruppe G/K wirkt auf X mit trivialem Kern und gleichen Bahnen wie die Wirkung G. Daher können wir im allgemeinen annehmen, dass der Kern trivial ist; dies nennen wir **treue** Wirkung.

- Eine Wirkung ist **stetig**, bzw. **holomorph**, wenn für jedes $g \in G$ die Bijektion $p \to g \cdot p$ eine stetige, bzw. holomorphe, Abbildung von X zu sich selbst ist. Wenn sie holomorph ist, ist sie notwendigerweise ein Automorphismus von X.

- Der **Quotientenraum** X/G ist die Menge der Bahnen.
  Sei π die kanonische Abbildung $\pi : X \to X/G$, die einen Punkt auf seine Bahn abbildet. Wir definieren nun eine Topologie auf X/G, indem wir eine Teilmenge $U \subset X/G$ offen nennen, genau dann wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in X ist, dies ist die **Quotiententopologie** auf X/G.
  Beachte: π ist stetig, und π ist eine offene Abbildung, falls die Wirkung stetig ist, insbesondere wenn sie holomorph ist.

Unser Ziel ist es eine komplexe Struktur auf X/G zu definieren, sodass π eine holomorphe Abbildung ist.

2 Stabilisatoren

Hierfür betrachten wir zunächst die Stabilisatoren genauer.

2.1 Proposition

Sei G eine Gruppe, die holomorph und treu auf einer Riemannschen Fläche X wirkt. Sei $p \in X$ fix. Wenn G_p endlich ist, dann ist G_p schon eine endliche zyklische Gruppe. Insbesondere sind alle Stabilisatoren endliche zyklische Untergruppen, wenn G endlich ist.

Beweis: Wir fixieren dazu eine lokale Koordinate z, die an p zentriert ist. Für beliebige $g \in G_p$ setzen wir $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(g)z^n$; Diese Potenzreihe hat keinen konstanten Term, da $g(p) = p$. Außerdem ist $a_1(g) \neq 0$, da g ein Automorphismus auf X ist und damit Vielfachheit eins an jedem Punkt, insbesondere an p, hat. Nun betrachten wir die Funktion $a_1 : G_p \to \mathbb{C}^*$. Wir bemerken, dass dies ein Gruppenhomomorphismus ist:
$a_1(gh)$ wird mit der Potenzreihe von $g(h(z))$ berechnet, und dies ist

$$\begin{aligned} g(h(z)) &= g(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(h)z^n) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} a_n(g)[\sum_{n=1}^{\infty} a_n(h)z^n]^m \\ &\equiv a_1(g)(a_1(h)z \pmod{z^2} \end{aligned}$$

somit ist $a_1(gh)) = a_1(g)a_1(h)$. Nun reicht es zu zeigen, dass dieser Homomorphismus injektiv ist, da die einzigen endlichen Untergruppen von $\mathbb{C}^x$ zyklisch sind. Sei g ein Element aus dem Kern von a_1, das heißt $g(z) \equiv z \pmod{z^2}$. Um zu zeigen, dass der Kern trivial ist, bleibt zu zeigen $g(z) = z$, also dass alle höheren Terme verschwinden.
Angenommen, dass wäre nicht der Fall; Sei $m \geq 2$ der Exponent vom ersten nicht verschwindenden Term.
Also $g(z) \equiv z + az^m \pmod{z^{m+1}}$ mit $a \neq 0$. Per Induktion sehen wir dann, dass $g^k(z) \equiv z + kaz^m \pmod{z^{m+1}}$.
Weil die Stabilisatorenuntergruppe endlich ist, muss das Element g endliche Ordnung haben, also $\exists k \in \mathbb{N}^+ : g^k$ ist die Identität ($g^k(z) = z$). Das heißt für dieses k gilt $k \cdot a = 0$, also muss $a = 0$ gelten. Dies widerspricht der Annahme. □

2.2 Proposition

Sei G eine endliche Gruppe, die holomorph und treu auf einer Riemannschen Fläche X wirkt. Dann sind die Punkte aus X, die nichttriviale Stabilisatoren besitzen, diskret.

Beweis: Angenommen es gäbe eine Folge $\{p_n\}$, die gegen p konvergiert, wobei für jedes p_i ein nichttriviales g_i existiert , welches es fixiert. Da G endlich ist, können wir zu einer Teilfolge übergehen, bei der alle p_i von einem gemeinsamen nichttrivialen g fixiert werden. Da g stetig ist, muss auch der Grenzwert p von g fixiert werden. Da g aber ein holomorpher Automorphismus ist, liefert uns der Identitätssatz für holomorphe Funktionen, dass g schon die Identität sein muss, was im Widerspruch zur Annahme steht.
Daher können sich Punkte mit nichttrivialen Stabilisatoren nicht häufen und bilden damit eine diskrete Menge. □.

3 Die Quotienten Riemannsche Fläche

Um eine komplexe Struktur auf X/G zu definieren, müssen wir komplexe Karten finden. Dabei hilft folgende Proposition:

3.1 Proposition

Sei G eine endliche Gruppe, die holomorph und treu auf einer Riemannschen Fläche X wirkt. Sei $p \in X$ beliebig. Dann existiert eine offene Umgebung U von p, mit folgenden Eigenschaften:

(a) U ist invariant bezüglich dem Stabilisator G_p, das heißt $g \cdot u \in U$ für alle $g \in G_p, u \in U$.

(b) $U \cap (g \cdot U) = \emptyset$ für alle $g \notin G_p$.

(c) die kanonische Abbildung $\alpha : U/G_p \to X/G$, die dadurch induziert wird, dass wir einen Punkt in U auf seine Bahn abbilden, ist ein Homeomorphismus auf eine offene Teilmenge von X/G.

(d) kein Punkt in U außer p wird durch ein Element von G_p fixiert.

Beweis: Seien $G - G_p = \{g_1, ..., g_n\}$ die Elemente von G die p nicht fixieren. Da X ein Hausdorff-Raum ist, finden wir für jedes i offene Umgebungen V_i von p und W_i von $g_i \cdot p$ mit $V_i \cap W_i = \emptyset$. Wir bemerken dabei, dass $g_i^{-1} \cdot W_i$ für jedes i eine offene Umgebung von p bildet. Sei $R_i = V_i \cap (g_i^{-1} \cdot W_i)$, $R = \bigcap_i R_i$ und $U = \bigcap_{g \in G_p} g \cdot R$. Die R_i bilden je eine Umgebung von p und damit auch R und U. Außerdem ist $g \cdot U = U$ für alle $g \in G_p$, da nur die Reihenfolge der Schnittbildung vertauscht wird. Dies liefert (a).
Um (b) zu zeigen, betrachten wir:

$$U \cap (g_i \cdot U) \subset R \cap (g_i \cdot R) \subset R_i \cap (g_i \cdot R_i) \subset V_i \cap W_i = \emptyset.$$

Zu (c): Die Karte $\alpha : U/G_p \to X/G$ ist wegen (b) injektiv. Sie ist außerdem stetig und offen, da die Komposition mit der kanonischen Abbildung von U nach U/G_p die Abbildung $\pi_{|U}$ liefert, welche stetig und offen ist. Damit ist α schon ein Homeomorphismus auf sein Bild in X/G.
(d) folgt daraus, dass die Menge der Punkte mit nicht trivialen Stabilisatoren diskret ist, indem wir U gegebenenfalls geeignet verkleinern. $\square$

Diese Proposition zeigt uns, wie wir Karten auf X/G definieren können:
Wir definieren Karten auf U/G_p und übertragen dies auf X/G mit der Abbildung α.
Wir wählen einen Punkt $\overline{p} \in X/G$, zudem sei $\overline{p}$ die Bahn von $p \in X$

$|\mathbf{G_p}| = \mathbf{1}$ Der Stabilisator von p ist dann trivial. Daher liefert uns Proposition 3.1 eine Umgebung U von p, sodass $\pi_{|U} : U \to W \subset X/G$ ein Homeomorphismus auf eine Umgebung W von $\overline{p}$ ist. Wir können nun annehmen, dass U im Definitionsbereich einer Karte $\Phi : U \to V$ auf X liegt (ansonsten verkleinern wir U geeignet). Nun bildet die Komposition $\Psi = \Phi \circ \pi_{|U}^{-1} : W \to V$ eine Karte auf X/G. Ψ ist ein Homeomorphismus, da Φ und $\pi_{|U}$ Homeomorphismen sind.

$|\mathbf{G_p}| \geq \mathbf{2}$ Erneut machen wir uns Proposition 3.1 zunutze. Diese liefert uns eine G_p-invariante Umgebung U von p, sodass die kanonische Abbildung $\alpha : U/G_p \to W \subset X/G$ ein Homeomorphismus auf eine Umgebung W von $\overline{p}$ ist. Wir können davon ausgehen, dass die Abbildung $U \to U/G_p$ außer für p immer genau m Punkte auf einen Bildpunkt abbildet. Wir suchen eine Abbildung $\Phi : W \to \mathbb{C}$ die wir als Karte von $\overline{p}$ nutzen wollen. Die Komposition von so einer Abbildung und der kanonischen Abbildung von U nach U/G_p würde eine G_p-invariante Funktion $h : U \to U/G_p \xrightarrow{\alpha} W \xrightarrow{\Phi} \mathbb{C}$ auf eine Umgebung von p bilden. Wir werden Φ über diese Funktion h finden. Sei z eine lokale Koordinate, die an p zentriert ist. Für jedes $g \in G_p$ hat die Funktion $z \to g \cdot z$ Vielfachheit eins an P. Definiere

$$h(z) = \prod_{g \in G_P} g \cdot z.$$

Beachte, dass h Vielfachheit $m = |G_p|$ an p hat und auf einer G_p-invarianten Umgebung von p definiert ist. Wir

können annehmen, dass h auf U definiert ist (ansonsten verkleinern wir U geeignet).
h ist holomorph und G_p-invariant. Wir können daher zu einer stetigen Funktion $\overline{h} : U/G_p \to \mathbb{C}$ übergehen. Zudem ist h offen und damit auch $\overline{h}$.
Nun zeigen wir noch, dass $\overline{h}$ injektiv ist: Dies ist so, weil die holomorphe Abbildung h Vielfachheit m hat und damit nahe p jeder Bildpunkt m Urbilder hat; gleiches gilt für die Abbildung von U nach U/G entfernt von p. Damit ist $\overline{h}$ injektiv.
Da $\overline{h}$ injektiv, stetig und offen ist, ist $\overline{h}$ ein Homeomorphismus auf seinen Bildbereich. Komposition mit der Inversen von $\alpha : U/G_p \to W$ liefert uns eine Karte Φ auf W:

$$\Phi : W \xrightarrow{\alpha^{-1}} U/G_p \xrightarrow{\bar{h}} V \subset \mathbb{C}.$$

3.2 Satz

Sei G eine endliche Gruppe, die holomorph und treu auf einer Riemannschen Fläche X wirkt. X/G wird durch obige Konstruktion von Karten auf X/G zu einer Riemannschen Fläche. Außerdem ist die Abbildung $\pi : X \to X/G$ holomorph mit Grad $|G|$ und $mult_p(\pi) = |G_p|$ für alle $p \in X$.

Beweis: Diese komplexen Karten überdecken X/G. Wir müssen demnach nur überprüfen , dass diese miteinander kompatibel sind. Da die Menge der Punkte mit nichttrivialen Stabilisatoren diskret ist, können wir davon ausgehen, dass sich keine zwei Karten, die durch einen $m \geq 2$ Fall erzeugt werden, treffen; wir hier also nichts überprüfen müssen. Ist nur ein Paar von Karten jeweils durch einen $m = 1$ Fall erzeugt wurden, dann sind sie schon kompatibel, da die ursprünglichen Karten auf X schon kompatibel waren.
Sei nun eine Karte $\Phi_1 : \overline{U}_2 \to V_1$ durch einen $m = 1$ Fall erzeugt und eine Karte $\Phi_2 : \overline{U}_2 \to V_2$ durch einen $m \geq 2$ Fall erzeugt. Seien U_1 und U_2 die offenen Menge in X die zum Konstruieren von dieser Karte verwendet werden. Wähle $\overline{r} \in \overline{U}_1 \cap \overline{U}_2$ und dazu einen Repräsentanten $r \in U_1 \cap U_2$ (wenn sich U_1 und U_2 nicht schneiden, ersetze U_1 durch eine Translation von U_1 durch die Gruppe G, die einen nichtleeren Schnitt mit U_2 hat). Sei w die lokale Koordinate in U_1 und z die lokale Koordinate in U_2. Dann ist die lokale Koordinate in $\overline{U}_1$ auch w und die lokale Koordinate in $\overline{U}_2$ ist $\overline{h}(z)$ wie oben konstruiert. Da nun aber h holomorph ist und z und w selbst schon kompatibel sind, sind auch Φ_1 und Φ_2 kompatibel. Da G endlich ist und X hausdorffsch ist, ist auch X/G hausdorffsch. Da X zusammenhängend ist und $\pi : X \to X/G$ surjektiv ist, ist X/G ebenfalls zusammenhängend. Damit ist X/G mit diesen Karten eine Riemannsche Fläche. Das π holomorph ist, folgt direkt aus den Definitionen der Karten auf X/G. Offensichtlich ist der Grad von π gleich $|G|$. Schlussendlich entspricht die Vielfachheit von π des Punktes p genau der Vielfachheit der Funktion $h(z)$ und diese ist $|G_p|$. $\square$

3.3 Korollar (Linearisierung der Wirkung)

Sei G eine endliche Gruppe, die holomorph und treu auf einer Riemannschen Fläche wirkt. Sei $p \in X$ fix mit nichttrivialen Stabilisatoren der Größe m. Sei $g \in G_p$ Erzeuger der Stabilisator-Untergruppe. Dann existiert eine lokale Koordinate z auf X zentriert an p, sodass $g \cdot z = \lambda z$, wobei λ eine primitive m-te Einheitswurzel ist.

Beweis: Wähle eine lokale Koordinate w auf X/G nahe $G \cdot p$. Die lokale Normalform Proposition liefert die Existenz einer lokalen Koordinate z auf X nahe p, sodass $w = z^m$ die Formel für π in diesem Koordinaten ist. Die Urbilder der Punkte die kleinen nicht-Null Werten von w entsprechen, unterscheiden sich genau um die m-ten Einheitswurzeln in den z-Koordinaten. Diese Urbilder sind aber auch Bahnen unter der Wirkung von Elementen der Stabilisatoren G_p. Demnach bestehen diese G_p-Bahnen, für kleine z, aus genau den Punkten $\{\exp((\frac{2\pi ik}{m})z) \mid 0 \leq k \leq m-1\}$. Damit muss schon $g \cdot z = \lambda z$ für ein $\lambda = exp(\frac{2\pi ik}{m})$ gelten. $\square$

4 Verzweigung des Quotientenraumes

4.1 Lemma

Sei G eine endliche Gruppe, die holomorph und treu auf einer kompakten Riemannschen Fläche X wirkt, mit der kanonischen Abbildung $\pi : X \to Y = X/G$. Dann existieren zu jedem Verzweigungspunkt $y \in Y$ eine natürliche Zahl $r \geq 2$, sodass $\pi^{-1}(y)$ aus genau $\frac{|G|}{r}$ Punkten in X besteht, und π an jedem dieser Urbilder Vielfachheit r hat.

Beweis: Sei $y \in Y$ ein Verzweigungspunkt. Seien $x_1, ...x_s$ die Punkte in X, die über y liegen; sie bilden durch die Wirkung von G eine einzige Bahn. Da die x_i's alle in der gleichen Bahn liegen, haben sie konjugierte Stabilisatorenuntergruppen und insbesondere haben diese gleiche Ordnung r. Außerdem ist die Anzahl s der Punkte in dieser Bahn gleich $\frac{|G|}{r}$. □

Durch die Anwendung von Hurwitz's Formel wird uns folgendes geliefert:

4.2 Korollar

Sei G eine endliche Gruppe, die holomorph und treu auf einer kompakten Riemannschen Fläche X mit der kanonischen Abbildung $\pi : X \to Y = X/G$ wirkt. Wenn es k Verzweigungsstellen $y_1, ..., y_k$ in Y gibt, für die π die Vielfachheit r_i an den $\frac{|G|}{r_i}$ Punkten über y_i hat, dann ist

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2) &= |G|(2g(X/G) - 2) + \sum_{i=1}^{k} \frac{|G|}{r_i}(r_i - 1) \\ &= |G||2g(X/G) - 2 + \sum_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{r_i})| \end{aligned}$$

4.3 Lemma

Seien k natürliche Zahlen $r_1, ..., r_k$ mit $r_i \geq 2$ für alle i gegeben. Sei $R = \sum_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{r_1})$. Dann:

(a) $R < 2 \Leftrightarrow k, \{r_i\} = \begin{cases} k = 1, r_1 \text{ beliebig; oder} \\ k = 2, r_1, r_2 \text{ beliebig; oder} \\ k = 3, \{r_i\} = \{2, 2, r_3 \text{ beliebig}\}\text{; oder} \\ k = 3, \{r_i\} = \{2, 3, 3\}, \{2, 3, 4\} \text{ oder} \{2, 3, 5\}. \end{cases}$

(b) $R = 2 \Leftrightarrow k, \{r_i\} = \begin{cases} k = 3, \{r_i\} = \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 4\} \text{ oder} \{3, 3, 3\}\text{; oder} \\ k = 4, \{r_i\} = \{2, 2, 2, 2\}. \end{cases}$

(c) Wenn $R > 2$, dann ist $R \geq 2\frac{1}{42}$.

Beweis: Nachrechnen

Wir nutzen jetzt diese Resultate, um alle möglichen endlichen Gruppen, die auf der Riemannschen Sphäre wirken, zu erschließen. Sei G eine endliche Gruppe, die holomorph und treu auf $\mathbb{C}_\infty$ wirkt. Da $\mathbb{C}_\infty$ Geschlecht Null hat, muss auch $\mathbb{C}_\infty/G$ Geschlecht Null haben und die Hurwitz Formel liefert uns für diesen Fall

$$-2 = |G|(-2 + R), \text{ wobei } R = \sum_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{r_i}).$$

Insbesondere ist für $G \neq \{1\}$ auch $R \neq 0$ und damit $k \geq 1$, also gibt es Verzweigungen. Auch muss $R < 2$ sein und damit

$$|G| = \frac{2}{2 - R}.$$

$k = 1$ ist also nicht möglich, da sonst $R = 1 - \frac{1}{r}$ für ein $r \geq 2$ und damit $0 < R < 1$ und $2 > 2 - R > 1$, wodurch $|G| = \frac{2}{2-R}$ keine natürliche Zahl wäre.

Ist $k = 2$, so müssen r_1 und r_2 gleich sein:
Seien y_1 und y_2 die Verzweigungsstellen. Sei γ eine Schlinge in $\mathbb{C}_\infty/G$ um y_1, die an einem Punkt y_0 startet und endet. Diese Schleife γ kann zu einer Kurve in $\mathbb{C}_\infty$ gehoben werden, die in einem der $|G|$ Punkte der Faser von π über y_0 startet. Nun bilden wir eine Permutation dieser Faser von π, indem wir einen Punkt p der Faser auf den Endpunkt der Liftung von γ, die in p startet, abbilden. Diese Permutation hat dann die Ordnung r_1. Analoges gilt für eine Schleife um y_2, welche uns eine Permutation der Ordnung r_2 liefert. Da nun aber $\mathbb{C}_\infty/G \cong \mathbb{C}_\infty$ ist, sind die beiden Schleifen homotop; die Schleifen haben also gleiche Ordnung $r = r_1 = r_2$. In diesem fall ist $|G| = 2/(2 - R) = r$. Dies wird durch die zyklische Gruppe der Ordnung r erreicht. Sie wirkt auf $\mathbb{C}_\infty$ durch Multiplikation der Koordinate z mit einer r-ten Einheitswurzel.

Im Fall $k = 3$ muss gelten:

$$\begin{array}{c}
\text{wenn } \{r_i\} = 2, 2, r \text{ dann } |G| = 2r \\
\text{wenn } \{r_i\} = 2, 3, 3 \text{ dann } |G| = 12 \\
\text{wenn } \{r_i\} = 2, 3, 4 \text{ dann } |G| = 24 \\
\text{wenn } \{r_i\} = 2, 3, 5 \text{ dann } |G| = 60
\end{array}$$

Der erste Fall wird durch das Wirken der Dihedralgruppe erreicht. Die anderen Fälle werden durch das Wirken von A_4, S_4 und A_5 erreicht.

Nun schauen wir uns noch kurz endliche Gruppenwirkungen auf Riemannschen Flächen mit Geschlecht Eins an. Angenommen X hat Geschlecht Eins und G ist eine endliche Gruppe, die holomorph und treu auf X wirkt. Dann hat X/G Geschlecht ≤ 1.
Wenn X/G Geschlecht Eins hat, dann ist nach Korollar 4.2 $0 = |G|R$, also $R = 0$ und damit gibt es keine Verzweigungen der Abbildung π. Dann hat keiner der Automorphismen auf X, der durch das Wirken eines Elementes von G gegeben ist, einen Fixpunkt. Damit müssen sie schon Translationen auf X sein und G ist die endliche abelsche Gruppe der Translationen auf X.
Wenn X/G Geschlecht Null hat, dann ist $0 = |G|(-2 + R)$, also $R = 2$ und die vier Fälle von Lemma 4.3 (b) sind die einzigen Möglichkeiten für Verzweigungen.

5 Satz von Hurwitz für Automorphismen

Für Riemannsche Flächen mit Geschlecht Zwei oder mehr, liefert Korollar 4.3 eine Einschränkung für die Ordnung der Gruppe G, die holomorph und treu auf ihr wirken. Dies wurde zuerst von Hurwitz gezeigt und daher heißt folgender Satz:

5.1 Satz von Hurwirtz

Sei G eine endliche Gruppe, die holomorph und treu auf einer kompakten Riemannschen Fläche X mit Geschlecht $g \geq 2$ wirkt. Dann ist

$$|G| \leq 84(g-1).$$

Beweis: Korollar 4.3 liefert

$$2g-2 = |G|(2g(X/G) - 2 + R), \text{ wobei } R = \sum_i (1 - \frac{1}{r_i}).$$

Fall 1: $g(X/G) \geq 1$

Wenn $R = 0$ ist, es also keine Verzweigungen in der kanonischen Abbildung gibt, dann ist $g(X/G) \geq 2$, womit $|G| \leq g - 1$ ist.
Wenn $R \neq 0$ ist, muss $R \geq \frac{1}{2}$ sein. Dann ist $2g(X/G) - 2 + R \geq \frac{1}{2}$, also $|G| \leq 4(g-1)$.

Fall 2: $g(X/G) = 0$

Dann ist $2g - 2 = |G|(-2 + R)$, also $R > 2$ und damit nach Lemma 4.3 (c) $R - 2 \geq \frac{1}{42}$. Insgesamt alle $|G| \leq 84(g-1)$.

□

Die Gruppe aller Automorphismen einer Riemannschen Fläche mit Geschlecht mindestens zwei ist eine endliche Gruppe.
Da die gesamte Gruppe $Aut(X)$ holomorph und treu auf X wirkt, bedeutet dies

$$|Aut(X)| \leq 84(g(X) - 1).$$

Quellenangabe

Miranda, R.: *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society 1995