Globale Eigenschaften holomorpher Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen

Johannes Krohn

22.01.2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Lokale Normalform und Multiplizität **2**

3 Der Grad einer holomorphen Abbildung **4**

4 Die Summe der Ordnungen einer meromorphen Funktion **6**

5 Die Euler-Charakteristik einer kompakten Fläche **7**

6 Die Formel von Hurwitz **9**

1 Einleitung

In dieser Ausarbeitung werden wir die Multiplizität und Verzweigungspunkte von holomorphen Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen einführen. Es soll der Grad einer holomorphen Abbildung diskutiert und schließlich die Hurwitz-Formel bewiesen werden. Die Ausarbeitung folgt den Darlegungen in [M, S. 44-55]. Ist nichts anderes angegeben, sind X und Y immer Riemannsche Flächen.

2 Lokale Normalform und Multiplizität

Proposition 1. *Sei $F : X \to Y$ eine nicht konstante Abbildung, welche in $p \in X$ holomorph ist. Dann existiert ein eindeutiges $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit der Eigenschaft, dass für jede Karte $\phi_2 : U_2 \to V_2$ für Y, welche in $F(p)$ zentriert ist, eine Karte $\phi_1 : U_1 \to V_1$ für X existiert, welche in p zentriert ist, sodass $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^m, \quad \forall z \in V_1$.*

Beweis. Sei $\phi_2 : U_2 \to V_2$ eine Karte für Y, zentriert in $F(p)$ und $\psi : U \to V$ eine Karte für X, zentriert in p. Sei weiter $T : V \to (\phi_2 \circ F)(U)$, $T(w) := \phi_2(F(\psi^{-1}(w)))$. Es gilt dann $T(0) = 0$ und da F in p holomorph ist, ist T in 0 holomorph und besitzt dort die Taylorreihe $T(w) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^i$ mit $c_m \neq 0$ und $m \geq 1$, da $T(0) = 0$. Durch Ausklammern von w^m erhalten wir $T(w) = w^m S(w)$ mit $S(w) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^{i-m}$, wobei S holomorph in 0 ist und $S(0) = c_m \neq 0$.
Da V offen und S holomorph in 0 ist, finden wir einen offenen Ball $B \subset V$ um 0, sodass $S\big|_B$ nirgends verschwindet und weil B ein Elementargebiet ist, finden wir eine holomorphe Funktion $R : B \to \mathbb{C}$, welche $R(w)^m = S(w)$ erfüllt. Damit erhalten wir $T(w) = (wR(w))^m$, $\forall w \in B$.
Sei nun $\eta(w) := wR(w)$. Es folgt $\eta'(w) = wR'(w) + R(w)$ also $\eta'(0) = R(0) \neq 0$. Also extistiert eine Umgebung $B' \subseteq B$ um 0, auf welcher η biholomorph ist. Damit ist $\phi_1 := \eta \circ \psi : U_1 := \psi^{-1}(B') \to \phi_1(U_1) =: V_1$ eine Karte für X, welche in p zentriert ist.
Wir können nun durch η eine neue Koordinate z auf $\mathbb{C}$ einführen ($z = \eta(w)$) und erhalten $z = wR(w)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) &= \phi_2(F(\psi^{-1}(\eta^{-1}(z)))) \\ &= T(\eta^{-1}(z)) = T(w) = (wR(w))^m \\ &= z^m, \quad \forall z \in V_1.\end{aligned}$$

Damit haben wir die Existenz gezeigt. Für die Eindeutigkeit betrachten wir ein weiteres Paar von Karten $\psi_1 : U_1' \to V_1'$ für X und $\psi_2 : U_2' \to V_2'$ für Y, welches die Behauptung erfüllt, mit $\psi_2(F(\psi_1^{-1}(z))) = z^n, \quad \forall z \in V_1'$.

Da die Karten ϕ_1 und ψ_1 in p zentriert sind, ist $\mathcal{O} := \phi_1(U_1 \cap U_1') \cap \psi_1(U_1 \cap U_1')$ offen und nicht leer, sodass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B(0,\varepsilon) \subset \mathcal{O}$.
$B(0,\varepsilon)$ wird unter $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ auf $B(0,\varepsilon^m)$ abgebildet und unter $\psi_2 \circ F \circ \psi_1^{-1}$ auf $B(0,\varepsilon^n)$. Sei nun $q \in \phi_2^{-1}(B(0,\varepsilon^m) \setminus \{0\}) \cap \psi_2^{-1}(B(0,\varepsilon^n) \setminus \{0\})$. $\phi_2(q)$ hat nun unter $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ genau m Urbilder in $B(0,\varepsilon) \subset \phi_1(U_1 \cap U_1')$. Damit hat q unter F genau m Urbilder in $U_1 \cap U_1'$. Analog hat q unter F genau n Urbilder in $U_1 \cap U_1'$, also folgt $m = n$. □

Definition 2. *Das Eindeutige $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ aus der Proposition heißt* Multiplizität *der Abbildung F im Punkt $p \in X$ und wird mit $mult_p(F)$ bezeichnet.*

Beispiel 3. *Sei $\phi : U \to V$ eine Karte für X, interpretiert als eine holomorphe Abbildung nach $\mathbb{C}$. Dann hat ϕ die Multiplizität 1 in jedem $p \in U$.*

Beweis. Sei $p \in U$ und $W \subseteq V$ eine offene Teilmenge mit $\phi(p) \in W$ und $\phi_2 : W \to \tilde{V}$ eine Karte für $\mathbb{C}$, zentriert in $\phi(p)$. Dann ist $\phi_1 := \phi_2 \circ \phi : U \cap \phi^{-1}(W) \to U_1 := \phi_1(U \cap \phi^{-1}(W))$ ein Karte für X und $\phi_1(p) = \phi_2(\phi(p)) = 0$. Es gilt

$$\phi_2(\phi(\phi_1^{-1}(z))) = (\phi_2 \circ \phi \circ \phi^{-1} \circ \phi_2^{-1})(z) = z, \quad \forall z \in U_1.$$

Also hat ϕ Multiplizität 1. □

Wir können die Multiplizität einer nicht konstanten Abbildung $F : X \to Y$ zwischen Riemannschen Flächen auch berechnen ohne explizit Koordinaten zu finden, welche F in die lokale Normalform bringen. Wir wählen dazu lokale Koordinaten z um $p \in X$ und w um $F(p)$, sodass p zu z_0 und $F(p)$ zu w_0 korrespondiert. In diesen Koordinaten können wir die Abbildung F schreiben als $w = h(z)$, wobei h holomorph ist.

Lemma 4. *Mit dieser Notation ist die Multiplizität von F in p eins mehr als die Ordnung der Nullstelle von h' in z_0:*

$$mult_p(F) = 1 + ord_{z_0}\left(\frac{dh}{dz}\right).$$

Insbesondere gilt: Ist $h(z) = h(z_0) + \sum_{i=m}^{\infty} c_i(z - z_0)^i$ mit $m \geq 1$ und $c_m \neq 0$ die Taylorreihe von h in z_0, so gilt $mult_p(F) = m$.

Beweis. Im Beweis zu Proposition 1 haben wir gesehen, dass die Multiplizität von F der kleinste Term der Taylorreihe von F war, wobei wir zentrierte lokale Koordinaten um p und $F(p)$ verwendet haben. Mit der obigen Notation sind $z - z_0$ und $w - w_0$ solche zentrierten Koordinaten. Wegen $w - w_0 = h(z) - h(z_0)$ sehen wir, dass die Multiplizität der kleinste Term der Taylorentwicklung von $h - h(z_0)$ um $z = z_0$ ist, denn $h(z) - h(z_0) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i(z - z_0)^i$. Dies ist bekanntermaßen 1 mehr als die Ordnung der Nullstelle von $\frac{dh}{dz}$ in z_0. □

Definition 5. *Sei $F : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung. Ein Punkt $p \in X$ heißt* Verzweigungsstelle *von F, wenn $mult_p(F) \geq 2$.*
Ein Punkt $y \in Y$ heißt Verzweigungspunkt *von F, wenn er das Bild einer Verzweigungsstelle ist.*

Das Lemma zeigt, dass die Menge der Verzweigungsstellen sowie die Menge der Verzweigungspunkte einer nicht konstanten holomorphen Abbildung zwischen Riemannschen Flächen diskret ist, denn solche Punkte korrespondieren zu Nullstellen der ersten Ableitung einer lokalen Formel h für F und da h holomorph ist, sind die Nullstellen von h' diskret.
Für Multiplizität eins ist das nicht wahr, was man an Beispiel 3 sehen kann.

Lemma 6. *Sei f eine meromorphe Funktion auf einer Riemannschen Fläche X mit zugeordneter holomorpher Abbildung $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ in die Riemannsche Zahlenkugel [M, S. 41].*

a) Ist $p \in X$ Nullstelle von f, so gilt $mult_p(F) = ord_p(f)$.
b) Ist $p \in X$ ein Pol von f, so gilt $mult_p(F) = -ord_p(f)$.
c) Ist $p \in X$ weder Pol- noch Nullstelle, so gilt $mult_p(F) = ord_p(f - f(p))$.

Beweis. Sei $p \in X$ eine Polstelle von f. Wir betrachten die Karte

$$\varphi : \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

von $\mathbb{C}_\infty$. Diese Karte ist in $F(p)$ zentriert und wir erhalten mit Lemma 4 und [M, S. 26]

$$\mathrm{mult}_p(F) = \mathrm{ord}_p(\varphi \circ f) = \mathrm{ord}_p\left(\frac{1}{f}\right) = -\mathrm{ord}_p(f).$$

Daraus folgt b).
Sei nun $p \in X$ keine Polstelle von f und $z_0 := f(p)$. Dann hat die Funktion $f - z_0$ eine Nullstelle in p und wir erhalten wieder mit Lemma 4

$$\mathrm{mult}_p(F) = \mathrm{ord}_p(f - f(p)),$$

woraus a) und c) folgen. □

3 Der Grad einer holomorphen Abbildung zwischen kompakten Riemannschen Flächen

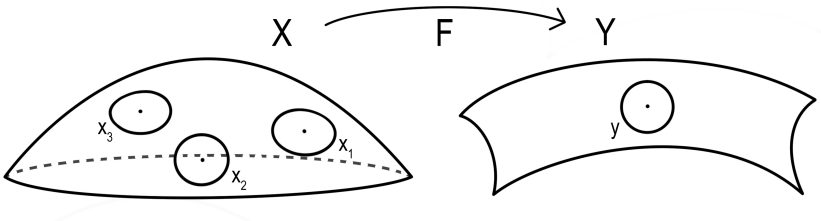
Proposition 7. *Sei $F : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen, wobei X kompakt ist. Für jedes $y \in Y$ definieren wir $d_y(F)$ als*

die Summe der Multiplizitäten von F über $F^{-1}(y)$:

$$d_y(F) := \sum_{p \in F^{-1}(y)} mult_p(F).$$

Dann ist $d_y(F)$ konstant, also unabhängig von y.

Beweis. Die Idee ist zu zeigen, dass die Funktion $y \mapsto d_y(F)$, als Funktion von Y in die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, lokal konstant ist. Da Y als Riemammsche Fläche zusammenhängend ist, ist eine lokal konstante Abbildung auch konstant.
Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ f(z) = z^m, \quad m \geq 1$. Die einzig mögliche Verzweigungsstelle von f liegt in $z = 0$ mit Multiplizität m. Alle anderen Punkte haben Multiplizität 1. Für jedes $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ existieren genau m Urbilder (m-te Wurzeln von w) unter f, jedes mit Multiplizität 1. Ist $w = 0$, so ist $z = 0$ das einzige Urbild, mit Multiplizität m. Daher erfüllt f die Behauptung, d.h. $d_y(f) = m, \quad \forall y \in \mathbb{D}$.
Dies funktioniert immer noch, wenn man eine Abbildung von mehreren disjunkten offenen Bällen nach $\mathbb{D}$ betrachtet, wobei auf jedem der Bälle der Exponent m unterschiedlich sein kann. Wir zeigen nun, dass jede holomorphe nicht konstante Abbildung F in einer Umgebung jedes $y \in Y$ lokal genau solch eine Abbildung ist.
Sei $y \in Y$. Dann besteht das Urbild von y unter F aus endlich vielen Elementen $x_1, \ldots, x_n \in X$ [M, S. 41]. Sei w eine lokale Koordinate auf Y, zentriert in y. Nach Proposition 1 finden wir Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ auf X, sodass z_i in x_i zentriert ist und F die Form $z \mapsto z_i^{m_i}$, in einer Umgebung von x_i hat, mit $m_i \geq 1$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Wenn wir diese Umgebungen klein genug wählen, haben wir genau die oben beschriebenen disjunkten Bälle, welche unter F auf einen Ball um 0 abgebildet werden.



Wir müssen noch zeigen, dass wir eine Umgebung um y finden, sodass alle Punkte dieser Umgebung Urbilder in den Umgebungen der x_i's haben. Dafür brauchen wir die Kompaktheit von X:
Angenommen beliebig nahe an y gibt es einen Punkt, welcher ein Urbild außerhalb der Umgebungen der x_i's hat. Dann finden wir eine Folge in X, welche außerhalb der Umgebungen der x_i's liegt, sodass die Bilder dieser Folgenglieder unter F gegen y konvergieren. Da X kompakt ist, finden wir eine konvergente Teilfolge $\{p_n\}_{n \geq 1} \subseteq X$ dieser Punkte

mit Grenzwert $x \in X$. Dann gilt aufgrund der Stetigkeit von F, $F(x) = y$. Damit muss aber $x = x_i$ für ein $1 \leq i \leq n$ gelten. Da aber keines der Folgenglieder p_n in einer der Umgebungen der x_i's liegt, erhalten wir einen Widerspruch. Das beweist, dass es keine ungezählten Urbilder in einer Umgebung von y gibt und beendet den Beweis. □

Diese Proposition motiviert die

Definition 8. *Sei $F : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen, wobei X kompakt ist. Der* Grad von F, *deg(F), ist die ganze Zahl $d_y(F)$, für jedes $y \in Y$.*

Korollar 9. *Sei $F : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung und X kompakt. F ist genau dann ein Isomorphismus (biholomorphe Abbildung), wenn F Grad 1 hat.*

Beweis. Sei $\deg(F) = 1$. Wegen $\deg(F) \geq 1$ hat jedes Element $y \in Y$ mindestens ein Urbild und somit ist F surjektiv. Wegen $\deg(F) \leq 1$ hat jedes $y \in Y$ aber auch höchstens ein Urbild. Also ist F auch injektiv und damit bijektiv. Da eine bijektive holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen ein Isomorphismus ist [M, S. 40], folgt die eine Richtung.
Ist $\deg(F) < 1$, so ist F nicht surjektiv und ist $\deg(F) > 1$ so ist F nicht injektiv, denn F hat an einem Punkt entweder mehr als ein Urbild oder an einem Punkt ist die Multiplizität größer als 1 und somit existieren nach Proposition 1 lokale Koordinaten, sodass F lokal nicht injektiv ist. □

Proposition 10. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und f eine meromorphe Funktion auf X mit genau einem einfachen Pol $p \in X$. Dann ist X isomorph zu $\mathbb{C}_\infty$.*

Beweis. Die zugeordnete Abbildung $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ hat die Multiplizität 1 in p und p ist der einzige Punkt, der auf ∞ abgebildet wird. Daher hat F den Grad 1 und ist wegen dem Korollar ein Isomorphismus. □

4 Die Summe der Ordnungen einer meromorphen Funktion

Proposition 11. *Sei f eine nicht konstante meromorphe Funktion auf einer kompakten Riemannschen Fläche X. Dann gilt*

$$\sum_{p \in X} ord_p(f) = 0.$$

Beweis. Sei $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ die zu f gehörende holomorphe Abbildung in die Riemannsche Zahlenkugel. Sei $\{x_i\}_{i\in I}$ die Menge der Punkte in X, welche unter F auf 0 abgebildet werden und $\{y_j\}_{j\in J}$ die Menge der Punkte in X, welche auf ∞ abgebildet werden. Die x_i's sind genau die Nullstellen von f und die y_j's die Polstellen. Sei d der Grad von F. Nach Definition gilt

$$d = \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) \quad \text{und} \quad d = \sum_j \text{mult}_{y_j}(F).$$

Die Punkte von X wo f eine von 0 verschiedene Ordnung besitzt sind die Null- und Polstellen $\{x_i\}_{i\in I}$ und $\{y_j\}_{j\in J}$.
Nach Lemma 6 gilt

$$\text{mult}_{x_i}(F) = \text{ord}_{x_i}(f) \quad \text{und} \quad \text{mult}_{y_j}(F) = -\text{ord}_{y_j}(f).$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}\sum_{p\in X} \text{ord}_p(f) &= \sum_i \text{ord}_{x_i}(f) + \sum_j \text{ord}_{y_j}(f) \\ &= \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) - \sum_j \text{mult}_{y_j}(F) \\ &= d - d = 0.\end{aligned}$$

□

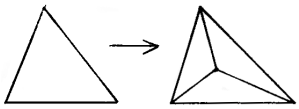
5 Die Euler-Charakteristik einer kompakten Fläche

Sei S eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit (evtl. mit Rand). Eine *Triangulierung* von S ist eine Unterteilung von S in abgeschlossene Teilmengen, jede homöomorph zu einem Dreieck, sodass je zwei Teilmengen entweder disjunkt sind, oder sich nur in einer Ecke oder entlang einer Kante schneiden, wobei sie sich in genau zwei Ecken schneiden müssen, wenn sie sich entlang einer Kante schneiden (Ecken und Kanten sind die Bilder von Ecken und Kanten der Dreicke unter den Homöomorphismen).

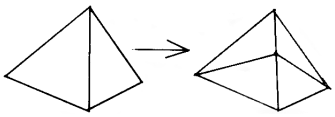
Definition 12. *Sei S eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, evtl. mit Rand. Angenommen es existiert eine Triangulierung von S mit E Ecken, K Kanten und F Flächen. Die* Euler-Charakteristik *von S bezüglich dieser Triangulierung ist die Zahl $\chi(S) := E - K + F$.*

Proposition 13. *Die Euler-Charakteristik ist unabhängig von der Wahl der Triangulierung. Für eine kompakte orientierbare 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand vom topologischen Geschlecht g ist die Euler-Charakteristik gerade $2 - 2g$.*

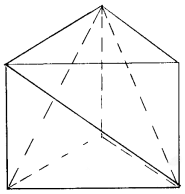
Beweisskizze. Wir führen zunächst den Begriff der Verfeinerung einer Triangulierung ein. Haben wir eine Triangulierung der Mannigfaltigkeit und betrachten wir ein Dreieck, erhalten wir eine „feinere“ Triangulierung, indem wir eine neue Ecke im Inneren des Dreiecks platzieren und diese mit allen drei anderen Ecken durch Kanten verbinden.



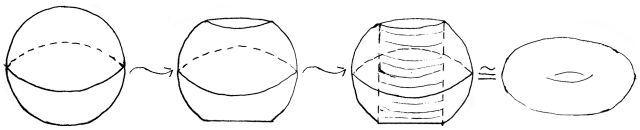
Betrachten wir zwei Dreiecke die sich nur entlang einer Kante schneiden, erhalten wir eine feinere Triangulierung, wenn wir eine Ecke auf der Kante platzieren, welche die beiden Dreiecke verbindet und dann die neue Ecke mit den beiden noch unverbundenen Ecken verbinden.



Hat die Mannigfaltigkeit einen Rand, halbieren wir einfach ein Dreieck entlang einer Kante, welche Teil des Randes ist.
Diese drei Operationen heißen *elementare Verfeinerungen* und man rechnet leicht nach, dass diese die Euler-Charakteristik unverändert lassen. Eine *Verfeinerung* entsteht nun aus einer Folge von elementaren Verfeinerungen. Daher haben eine Triangulierung und jede ihrer Verfeinerungen die selbe Euler-Charakteristik. Wenn wir zeigen können, dass je zwei Triangulierungen eine gemeinsame Verfeinerung besitzen, haben wir den ersten Teil der Behauptung bewiesen. Man kann diese Aussage zeigen, indem man die Ecken und Kanten zweier Triangulierungen „übereinander legt“ und so viele Ecken und Kanten hinzufügt, dass wieder eine Triangulierung entsteht. Es ist möglich die beiden Triangulierungen so „übereinanderzulegen“, dass jede Ecke der einen Triangulierung in jeweils einem Inneren eines Dreiecks der anderen Triangulierung liegt. Man kann zeigen, dass dieser Prozess nur aus elementaren Verfeinerungen beider Triangulierungen besteht. Auf Beweise dieser Tatsachen soll an dieser Stelle verzichtet werden.
Wenn man z.B. die Oberfläche eines Tetraeders homöomorph auf S^2 projiziert, erhält man $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$. Also Stimmt die Behauptung für den Fall $g = 0$.
Ein Zylinder hat die Euler-Charakteristik 0, denn es lässt sich z.B. folgendes Gebilde homöomorph auf ihn projizieren:



An einem Dreieck sieht man, dass eine abgeschlossene Kreisscheibe die Euler-Charakteristik 1 hat.
Um das Geschlecht einer Fläche um 1 zu erhöhen, entfernen wir zwei Kreisscheiben und fügen einen Zylinder hinzu, wie folgende Graphik verdeutlichen soll:



Das entfernen der Kreisscheiben verkleinert die Euler-Charakteristik um jeweils 1 und das Hinzufügen des Zylinders lässt sie invariant. Daher verringert sich die Euler-Charakteristik um 2 wenn das Geschlecht der Fläche um 1 erhöht wird. Induktiv erhalten wir damit die behauptete Formel. □

6 Die Formel von Hurwitz

Die Wohldefiniertheit des Grades einer holomorphen Abbildung zwischen kompakten Riemannschen Flächen, kombiniert mit der Theorie der Euler-Charakteristik, gibt uns eine wichtige Formel, welche die Geschlechter von Urbild und Bild mit dem Grad und der Verzweigung der Abbildung in Verbindung bringt. Dies ist die Hurwitz-Formel, welche sehr nützlich in der Theorie der kompakten Riemannschen Flächen ist.

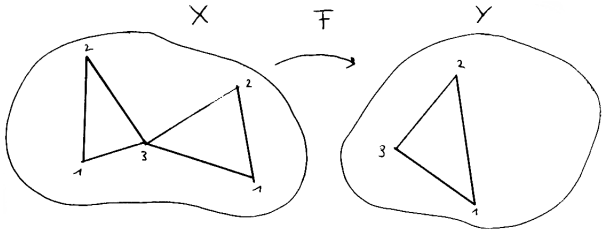
Satz 14. *Sei $F : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung zwischen kompakten Riemannschen Flächen. Dann gilt*

$$2g(X) - 2 = deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [mult_p(F) - 1],$$

wobei $g(X)$, bzw. $g(Y)$ das topologische Geschlecht von X bzw. Y bezeichnet.

Beweis. Da X kompakt ist, ist die Menge der Verzweigungsstellen endlich, sodass die Summe auf der rechten Seite der Gleichung endlich ist. Wir wählen eine Triangulierung auf Y, sodass jeder Verzweigungspunkt eine Ecke darstellt. Angenommen die Triangulierung hat E Ecken, K Kanten und A Flächen. Da F surjektiv ist [M, S. 41], können wir die Triangulierung auf Y via F zu einer Triangunlierung auf X „liften“, mit E' Ecken,

K' Kanten und A' Flächen. Wir bemerken, dass jede Verzweigungsstelle von F eine Ecke auf X ist.
Jedes Dreieck auf X hat höchstens drei Verzweigungsstellen und das Innere jedes Dreiecks von Y wird durch F auf Innere von Dreiecken nach X „geliftet“, welche keine Verzweigungsstellen mehr enthalten, d.h. die Multiplizität an diesen Punkten ist 1. Also erhalten wir $A' = \deg(F)A$, denn jedes Dreieck von Y wird zu $\deg(F)$ Dreiecken auf X „geliftet“. Mit der gleichen Argumentation erhalten wir $K' = \deg(F)K$, denn jede Kante auf Y enthält außer den Ecken keine Verzweigungspunkte und F hat somit in jedem Punkt von X der darauf abgebildet wird Multiplizität 1. Also hat jede Kante auf Y genau $\deg(F)$ disjunkte Urbilder in X.



Wir fixieren nun eine Ecke $q \in Y$. Die Anzahl der Urbilder von q in X ist

$$|F^{-1}(q)| \;=\; \sum_{p\in F^{-1}(q)} 1 \;=\; \deg(F) + \sum_{p\in F^{-1}(q)} [1 - \mathrm{mult}_p(F)].$$

Daher ist die Gesamtzahl an Urbildern von Ecken auf Y, welches die Anzahl E' an Ecken auf X ist

$$\begin{aligned} E' &= \sum_{\text{Ecke } q \text{ auf } Y} (\deg(F) + \sum_{p\in F^{-1}(q)} [1 - \mathrm{mult}_p(F)]) \\ &= \deg(F)E + \sum_{\text{Ecke } q \text{ auf } Y} \sum_{p\in F^{-1}(q)} [1 - \mathrm{mult}_p(F)] \\ &= \deg(F)E - \sum_{\text{Ecke } p \text{ auf } X} [\mathrm{mult}_p(F) - 1]. \end{aligned}$$

Daher folgt mit Proposition 13

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 = -\chi(X) &= -E' + K' - A' \\ &= -\deg(F)E + \sum_{\text{Ecke } p \text{ auf } X} [\mathrm{mult}_p(F) - 1] + \deg(F)K - \deg(F)A \\ &= -\deg(F)\chi(Y) + \sum_{\text{Ecke } p \text{ auf } X} [\mathrm{mult}_p(F) - 1] \\ &= \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p\in X} [\mathrm{mult}_p(F) - 1]. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, da jede Verzweigungsstelle von F eine Ecke von X ist und somit alle anderen Punkte Multiplizität 1 haben. □

Korollar 15. *Sei $F : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung zwischen kompakten Riemannschen Flächen mit $g := g(X) = g(Y) \geq 2$. Dann ist F ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach der Formel von Hurwitz gilt

$$2g - 2 = \deg(F)(2g - 2) + \sum_{p \in X} [\mathrm{mult}_p(F) - 1]$$

und wegen $\mathrm{mult}_p(F) \geq 1$ für alle $p \in X$ folgt $(2g-2)(1-\deg(F)) \geq 0$. Dies ist nur dann erfüllt, wenn $\deg(F) \leq 1$. Wegen $\deg(F) \geq 1$ folgt die Behauptung aus Korollar 9. □

Wir betrachten nun noch folgendes Beispiel:
Seien ein Polynom h vom Grad $d = 2k > 0$ mit nur einfachen Nullstellen sowie die ebene affine Kurve $X_0 := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : h(x) = y^2\}$ gegeben.
Weiter sei k das Polynom gegeben durch $k(z) = z^d h\left(\frac{1}{z}\right)$. Dieses hat ebenfalls nur einfache Nullstellen, was man leicht einsieht wenn man h als das Produkt seiner Linearfaktoren schreibt. Wir bilden nun die ebene affine Kurve $Y_0 := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : k(z) = w^2\}$.
Seien nun noch die offenen Mengen

$$U := \{(x,y) \in X_0 : x \neq 0\} \quad \text{und} \quad V := \{(z,w) \in Y_0 : z \neq 0\}$$

gegeben, sowie die Abbildung $\varphi : U \to V,\ (x,y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^k}\right)$.

Behauptung. *Durch die Verklebung von X_0 und Y_0 entlang von φ erhalten wir eine kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht $k-1$. Diese ist ein Beispiel für eine sogenannte* hyperelliptische Kurve.

Beweis. Da h und k nur einfache Nullstellen haben, sind die X_0 und Y_0 definierenden Polynome nicht-singulär. Also bilden X_0 und Y_0 Riemannsche Flächen.
Man rechnet leicht nach, dass φ wohldefiniert ist und mit der gleichen Funktionsvorschrift eine Umkehrabbildung bildet. In den Standardkarten rechnet man nun nach, dass φ holomorph ist, sodass die Abbildung auch biholomorph ist.
Wir können also X_0 und Y_0 entlang φ verkleben und erhalten einen topologischen Raum $X := X_0 \cup_\varphi Y_0$. $X_0 \sqcup Y_0$ ist normal und alle Äquivalenzklassen der Verklebung sind abgeschlossen, sodass X Hausdorffsch, also eine Riemannsche Fläche ist [M, S. 60].
Wir zeigen nun, dass X kompakt ist. Seien dazu zwei Mengen

$$A := \{(x,y) \in X_0 : |x| \leq 1\} \quad \text{und} \quad B := \{(z,w) \in Y_0 : |z| \leq 1\}$$

gegeben. Dann gilt offenbar $A \cup B \subset X$. Für die andere Richtung sei $(x,y) \in X_0$. Ist $|x| > 1$, so ist $|\frac{1}{x}| < 1$ und somit $\varphi(x,y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^k}\right) \in B$. Ist $|x| \leq 1$, so gilt $(x,y) \in A$. Analog argumentiert man für $(x,y) \in Y_0$. Also folgt auch $X \subset A \cup B$.
Wir können also X als Vereinigung von zwei kompakten Mengen schreiben, sodass X selbst kompakt ist.
Sei $\pi_x : X_0 \to \mathbb{C}$ die Projektion auf die erste Koordinate. Dann gilt für $x \in \mathbb{C}$:

$$\#\pi_x^{-1}(x) = \#\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : h(x) = y^2\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } h(x) = 0 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist nun x keine Nullstelle von h, so ist eine Einschränkung von π_x eine lokale Karte um $p_1 = (x,y_1)$ und $p_2 = (x,y_2)$ und somit gilt nach Beispiel 3: $\text{mult}_{p_i}(\pi_x) = 1$.
Wir können nun π_x zu einer holomorphen Abbildung $\pi : X \to \mathbb{C}_\infty$ fortsetzen, indem wir die beiden Punkte $[(0,w_1])$ und $[(0,w_2)]$ mit $k(0) = w_1^2 = w_2^2$ auf ∞ abbilden.
Also folgt $\deg(\pi) = 2$ und die d Nullstellen von h sind genau die Punkte mit Multiplizität 2.
Mit der Formel von Hurwitz folgt nun

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 &= 2(2g(\mathbb{C}_\infty) - 2) + \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(\pi) - 1] \\ &= -4 + d \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g(X) = k - 1. \qquad \square$$

Literatur

[M] Miranda, R.: *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society 1995