# Die Modulgruppe und die Modulfunktion

## 1 Die elliptische Modulgruppe

Wir betrachten jetzt nicht mehr ein festes Gitter, stattdessen untersuchen wir die Mannigfaltigkeit aller Äquivalenzklassen von Gittern.

***Definition 1.1.:*** Zwei Gitter $L \subset \mathbb{C}$, $L' \subset \mathbb{C}$ heißen äquivalent, wenn sie durch eine Drehstreckung auseinander hervorgehen. Wenn also eine komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$ mit $L' = aL$ $(a \neq 0)$ existiert.

Die elliptischen Funktionen bzgl. $L$ und $L'$ entsprechen sich dann umkehrbar eindeutig mittels der Zurodnung

$$f(z) \mapsto f(a^{-1}z),\ g(z) \mapsto g(az)$$

***Bemerkung 1.2.:*** Jedes Gitter $L' \subset \mathbb{C}$ ist äquivalent zu einem der Form

$$L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau,\ \tau \in \mathbb{H}.$$

**Beweis:**

Sei $L$ ein beliebiges Gitter $L \subset \mathbb{C}$ der Form $L = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$. Wir müssen also zeigen, dass ein $a \in \mathbb{C}$ existiert, mit dem $aL = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ gilt. Wenn wir $a = w_1^{-1}$ wählen gilt:

$$aL = \mathbb{Z}aw_1 + \mathbb{Z}aw_2 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}aw_2$$

Da $aw_2 \notin \mathbb{R}$ ($w_1$ und $w_2$ sind über den reellen Zahlen linear unabhängig) ist, müssen wir noch zeigen, dass $aw_2 \in \mathbb{H}$. Wenn $aw_2 \in \mathbb{H}$, dann sind wir bereits fertig. Also nehmen wir an das $aw_2 \notin \mathbb{H}$. Da aber $\mathbb{Z} = -\mathbb{Z}$ gilt. Können wir $aL = \mathbb{Z} - \mathbb{Z}aw_2 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}(-aw_2)$ schreiben und damit gilt $Im(-aw_2) > 0$ und daraus folgt die Behauptung: $-aw_2 \in \mathbb{H}$.

□

Also betrachten wir Gitter der Form $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ mit $\tau \in \mathbb{H}$. Wann sind zwei Gitter $L, L' \subset \mathbb{C}$ äquivalent? Genau dann, wenn es ein $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gibt mit:

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau' = a(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau), \text{ wobei } \tau, \tau' \in \mathbb{H}$$

Da 1 und $\tau'$ ein Erzeugendensystem von $L$ ist, muss $1, \tau' \in a(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau) = \{an + a\tau m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ gelten. Expliziter existieren $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ mit

$$\tau' = a(\alpha\tau + \beta) \text{ und } 1 = a(\gamma\tau + \delta) \text{ bzw. } \begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dividiert man diese Gleichungen, so erhält man

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}.$$

Der Punkt $\tau'$ geht also aus $\tau$ durch eine spezielle Möbiustransformation hervor. Bevor wir diese Analyse zu Ende führen, wird im nächsten Abschnitt diese Möbiustransformation untersucht.

***Hilfssatz 1.3.:*** Seien $\alpha, \beta, \gamma$ und $\delta$ 4 reelle Zahlen, so dass $\gamma$ oder $\delta$ von 0 verschieden ist und sei $D := \alpha\delta - \beta\gamma$. Ist $\tau \in \mathbb{H}$, so gilt:

$$Im\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \frac{D \cdot Im(\tau)}{|\gamma\tau+\delta|^2}$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
Im\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) &= \frac{1}{2i}\left[\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} - \frac{\alpha\overline{\tau}+\beta}{\gamma\overline{\tau}+\delta}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\frac{(\gamma\overline{\tau}+\delta)(\alpha\tau+\beta)-(\alpha\overline{\tau}+\beta)(\gamma\tau+\delta)}{|\gamma\tau+\delta|^2} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(\tau-\overline{\tau})}{|\gamma\tau+\delta|^2} \\
&= \frac{D \cdot Im(\tau)}{|\gamma\tau+\delta|^2}
\end{aligned}$$

$\square$

Für uns ist nur der Fall von Interesse, bei dem auch $\tau'$ in der oberen Halbebene liegt, daher ist $D = \alpha\delta - \beta\gamma > 0$.

***Definition 1.4.:*** Sei $GL_+(2,\mathbb{R}) := \left\{M = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, D = det(M) = \alpha\delta - \beta\gamma > 0\right\}$.

***Satz 1.5.:*** Die Substitution $\tau \mapsto M\tau := \dfrac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ definiert eine konforme Selbstabbildung der oberen Halbebene $\mathbb{H}$. Es gilt:

**a)** $E\tau = \tau$, $E = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

**b)** $M(N\tau) = (M \cdot N)\tau$, $M, N \in GL_+(2,\mathbb{R})$.

**c)** Die Umkehrabbildung ist durch die inverse Matrix $M^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix}\delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}$ gegeben.

**d)** Zwei Matrizen definieren genau dann dieselbe Abbildung, falls sie sich um einen skalaren Faktor unterscheiden.

**Beweis:**

**a)** $E \in GL_+(2,\mathbb{R})$. Außerdem $E\tau = \dfrac{\tau}{1} = \tau$.

**b)** Sei $M = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ und $N = \begin{pmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$ Dann ist auch $M \cdot N \in GL_+(2,\mathbb{R})$, da

$$M \cdot N = \begin{pmatrix}\alpha\alpha'+\beta\gamma' & \alpha\beta'+\beta\delta' \\ \gamma\alpha'+\delta\gamma' & \gamma\beta'+\delta\delta'\end{pmatrix}$$

reell ist $(\alpha\alpha'+\beta\gamma', \alpha\beta'+\beta\delta', \gamma\alpha'+\delta\gamma', \gamma\beta'+\delta\delta \in \mathbb{R}$, da $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \delta, \delta' \in \mathbb{R})$ und $det(M \cdot N) = det(M) \cdot det(N) > 0$.
Außerdem

$$\begin{aligned}
M(N\tau) &= M\left(\frac{\alpha'\tau+\beta'}{\gamma'\tau+\delta}\right) \\
&= \frac{\alpha\left(\dfrac{\alpha'\tau+\beta'}{\gamma'\tau+\delta}\right)+\beta}{\gamma\left(\dfrac{\alpha'\tau+\beta'}{\gamma'\tau+\delta}\right)+\delta} \\
&= \frac{(\alpha\alpha'+\beta\gamma')\tau+(\alpha\beta'+\beta\delta')}{(\gamma\alpha'+\delta\gamma')\tau+(\gamma\beta'+\delta\delta')} \\
&= (M \cdot N)\tau.
\end{aligned}$$

**c)** $M^{-1} \in GL_+(2,\mathbb{R})$, da $\alpha.\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ und damit auch $-\beta,-\gamma \in \mathbb{R}$, sowie $\dfrac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma} \in \mathbb{R}$, da $det(M) \neq 0$.

Außerdem gilt $\det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}(\delta\alpha-(-\beta)(-\gamma) = \dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma} = 1 > 0$.

$$M^{-1}\cdot M = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix}\alpha\delta-\beta\gamma & -\alpha\beta+\alpha\beta\\ \gamma\delta-\gamma\delta & \alpha\delta-\beta\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$M\cdot M^{-1}$ analog.

**d)** Sei $M,N \in GL_+(2,\mathbb{R})$.
Wenn die beiden Matrizen sich um einen skalaren Faktor $a \in \mathbb{R}$ unterscheiden, gilt:
$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\alpha' & a\beta'\\ a\gamma' & a\delta'\end{pmatrix}$, daraus folgt:

$$M\tau = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} = \frac{a\alpha'\tau+a\beta'}{a\gamma'\tau+a\delta'} = \frac{a(\alpha'\tau+\beta')}{a(\gamma'\tau+\delta')} = \frac{\alpha'\tau+\beta'}{\gamma'\tau+\delta'} = N\tau.$$

Sie definieren also die gleiche Abbildung.
Wenn $M$ und $N$ die gleiche Abbildung definieren gilt $M\tau = N\tau\ \forall\tau \in \mathbb{H}$. Da zwei Brüche genau dann gleich sind, wenn man aus Nenner und Zähler den gleichen skalaren Faktor herausziehen kann, unterscheiden sich $M$ und $N$ um einen skalaren Faktor $a \in \mathbb{R}$.

$M$ ist analytisch/holomorph, denn der Nenner von $M\tau$ ist für alle $\tau \in \mathbb{H}$ ungleich 0, da $\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ und nicht beide gleich 0 sein können, zudem $Im(\tau) > 0$. Damit sind der Nenner und der Zähler zwei lineare Funktionen, die jeweils analytisch sind. Analog ist auch $M^{-1}$ analytisch. Damit ist die Abbildung bijektiv. Außerdem ist es eine Selbstabbildung, da $det(M) > 0$ und damit gilt mit Hilfssatz 1.2. $Im(M\tau) > 0$.

□

Zurück zu unserem Äquivalenzproblem $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau' = a(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$.

***Definition 1.6.:*** Die *elliptische Modulgruppe* sei definiert durch:

$$\Gamma = SL(2,\mathbb{Z}) := \left\{M = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}; \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{Z}, det(M) = \alpha\delta-\beta\gamma = 1\right\}.$$

***Bemerkung 1.7.:*** $\Gamma$ ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation. Da für Matrizen $det(M\cdot N) = det(M)\cdot det(N)$ gilt, ist $\Gamma$ abgeschlossen. Das neutrale Element ist in $\Gamma$ enthalten, da $det(E) = 1$. Außerdem ist $M^{-1} = \begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix} \in \Gamma$, da $det(M^{-1}) = det(M) = 1$.

***Satz 1.8.:*** Zwei Gitter der Form

$$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau' \text{ und } \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau \text{ mit } \tau,\tau' \in \mathbb{H}$$

sind dann und nur dann äquivalent, wenn eine Matrix $M \in \Gamma$ mit der Eigenschaft $\tau' = M\tau$ existiert.

**Beweis:**

Wenn zwei Gitter $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau'$ und $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ äquivalent sind, gilt $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau' = a(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$ mit $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.
Die Inklusion "$\subset$" ist gleichbedeutend mit der Existenz einer ganzen Matrix $M$ mit der Eigenschaft

$$\begin{pmatrix}\tau'\\ 1\end{pmatrix} = aM\cdot\begin{pmatrix}\tau\\ 1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\alpha\tau+\beta\\ \gamma\tau+\delta\end{pmatrix}.$$

Die umgekehrte Inklusion "$\supset$" ist gleichbedeutend mit der Existenz einer ganzen Matrix $N$ mit der Eigenschaft

$$a\begin{pmatrix}\tau\\ 1\end{pmatrix} = N\cdot\begin{pmatrix}\tau'\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha'\tau'+\beta'\\ \gamma'\tau'+\delta'\end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhalten wir also: $\begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix} = N \cdot M \cdot \begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix}$.
Da $\tau$ und 1 über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, folgt $N \cdot M = E$, also auch $det(N) \cdot det(M) = 1$. Da die beiden Determinanten ganze Zahlen sind, folgt $det(M) = \pm 1$ Nach Hilfssatz 1.2 ist die Determinante positiv, also gilt $det(M) = 1$. Damit ist $M \in \Gamma$.
Also müssen wir noch zeigen, dass wenn eine Matrix $M \in \Gamma$ mit $\tau' = M\tau$ existiert, dass die beiden Gitter $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau'$ und $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ äquivalent sind.
Die Beziehung $\tau' = M\tau = \dfrac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$ kann auch in der Form

$$\begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\tau \\ a \end{pmatrix}, \text{ wobei } a = (\gamma\tau + \delta)^{-1}$$

geschrieben werden, damit gilt die Äquivalenz.
Zwei Punkte der oberen Halbebene sind äquivalent, wenn es eine Substitution $M \in \Gamma$ gibt, welche $\tau$ in $\tau'$ überführt, also $\tau' = M\tau$.

□

***Bemerkung 1.9.:*** Hierdurch wird eine Äquivalenzrelation definiert, dies folgt schon direkt aus den Gruppeneigenschaften von $\Gamma$. $(\tau, \tau', \tau'' \in \mathbb{H})$

- *Reflexivität:* $\tau$ ist zu sich selbst äquivalent: $\tau = E\tau$, $E \in \Gamma$.
- *Symmetrie:* Wenn $\tau$ zu $\tau'$ äquivalent ist, so ist auch $\tau'$ zu $\tau$ äquivalent:
  $\tau' = M\tau$, dann existiert auch ein $N \in \Gamma$ mit $\tau = N\tau'$. Wähle $N = M^{-1}$, dann gilt $N\tau' = (N \cdot M)\tau = \tau$.
- *Transitivität:* Wenn $\tau$ zu $\tau'$ äquivalent ist, also $\tau' = M\tau$, und $\tau'$ zu $\tau''$ äquivalent ist, also ein $N \in \Gamma$ existiert mit $\tau'' = N\tau'$. Dann ist auch $\tau$ zu $\tau''$ äquivalent. Dies folgt so:
  $N \cdot M\tau = N\tau' = \tau''$, also überfuhrt $N \cdot M$ $\tau$ nach $\tau''$, damit sind $\tau$ und $\tau''$ äquivalent.

***Definitionen 1.10.:***

- $[\tau] = \{M\tau;\ M \in \Gamma\}$ Bahn eines Punktes $\tau \in \mathbb{H}$ bei dieser Äquivalenzrelation.
- $\mathbb{H}/\Gamma = \{[\tau];\ \tau \in \mathbb{H}\}$ Gesamtheit aller Bahnen.

Bisher haben wir gezeigt, dass die Äquivalenzklassen von Gittern $L \subset \mathbb{C}$ umkehrbar eindeutig den Punkten von $\mathbb{H}/\Gamma$ entsprechen.

Wir wollen nun zeigen, dass zu jedem Paar komplexer Zahlen $(g_2, g_3) \in \mathbb{C}^2$, für die $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ gilt, ein Gitter $L \subset \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$g_2 = g_2(L),\ g_3 = g_3(L)$$

existiert.
***Bemerkung 1.11.:*** Die Größen $g_2(L), g_3(L)$ ändern sich, wenn man $L$ durch ein äquivalentes Gitter ersetzt. Es gilt $g_2(aL) = a^{-4}g_2(L)$ und $g_3(aL) = a^{-6}g_3(L)$.
Allgemein gilt für $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $k \geq 3$:

$$G_k(aL) = \sum_{\omega \in aL - \{0\}} \omega^{-k} = \sum_{\omega \in L - \{0\}} (a\omega)^{-k} = a^{-k} \sum_{\omega \in L - \{0\}} \omega^{-k} = a^{-k} G_k(L).$$

Insbesondere also $g_2(aL) = a^{-4}g_2(L)$ und $g_3(aL) = a^{-6}g_3(L)$.

Wir hätten jedoch gerne einen Ausdruck, der nur von der Äquivalenzklasse eines Gitters abhängt. Dazu führen wir folgende Größen ein:

***Definition 1.12.:***

- *Diskriminante:* $\Delta := g_2^3 - 27g_3^2$
- *absolute Invariante:* $j := \dfrac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$

Für die Diskriminante gilt

$$\Delta(aL) = g_2(aL)^3 - 27g_3(aL)^2 = (a^{-4}g_2(L))^3 - 27(a^{-6}g_3(L))^2 = a^{-12}(g_2(L)^3 - 27g_3(L)^2) = a^{-12}\Delta(L).$$

Daraus folgt

$$j(aL) = \frac{g_2(aL)^3}{\Delta(aL)} = \frac{a^{-12}g_2(L)^3}{a^{-12}\Delta(L)} = j(L).$$

$j$ bleibt also gleich, wenn wir ein äquivalentes Gitter benutzen.

*Annahme:* Zu jeder komplexen Zahl $j \in \mathbb{C}$ existiert ein Gitter $L \subset \mathbb{C}$ mit $j(L) = j$.

***Satz 1.13.:*** Zu jedem Paar komplexer Zahlen $(g_2, g_3)$ mit $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ kann ein Gitter $L \subset \mathbb{C}$ konstruiert werden, sodass $g_2 = g_2(L)$, $g_3 = g_3(L)$.

**Beweis:**

Wir finden zu einem Paar komplexer Zahlen $(g_2, g_3)$ ein $j^* = \frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}$, da $\Delta \neq 0$. Zu diesem $j^*$ finden wir nun nach Annahme ein Gitter $L \subset \mathbb{C}$, sodass $j^* = j(L)$. Wir verändern dieses Gitter durch Reskalierung sodass am Schluss die Behauptung gilt.
Als ersten Schritt versuchen wir nun ein $a \in \mathbb{C}$ zu finden, sodass $g_2^3(aL) = g_2^3$ gilt. Dazu schreiben wir $g_2^3 = j^* \cdot \Delta$

$$\Rightarrow \frac{g_2^3}{g_2(L)^3} = \frac{j^* \cdot \Delta}{g_2(L)^3} =: b \Rightarrow g_2(L)^3 = \frac{g_2^3}{b}$$

Unser $a$ ist nun eine 12te Wurzel von $b^{-1}$ (Also $a^{-12} = b$). Da dann $g_2(aL)^3 = a^{-12}g_2(L)^3 = a^{-12}\frac{g_2^3}{b} = g_2^3$ gilt.
Da sich $j$ nicht ändert ($j(aL) = j(L) = j^*$), folgt $g_2(aL)^3 = g_2^3$ und $g_3(aL)^2 = g_3^2$.
Also ist $g_3(aL) = g_3$ oder $g_3(aL) = -g_3$. Im ersten Fall brauchen wir $aL$ erstmal nicht mehr zu verändern. Im zweiten Fall können wir $aL$ durch $iaL$ ersetzten. Dadurch ändert sich $g_2(iaL) = i^{-4}g_2(aL) = g_2(aL)$ nicht. Aber $g_3(iaL) = i^{-6}g_3(aL) = (-1)(-g_3) = g_3$.
Sei jetzt unser $aL$ bzw. $iaL$ mit $L^*$ bezeichnet, dann dürfen wir $g_2(L^*)^3 = g_2^3$ und $g_3(L^*) = g_3$ annehmen.
Das heißt $g_2(L^*) = g_2$ oder $g_2(L^*) = \zeta_{1,3}^1 g_2$ oder $g_2(L^*) = \zeta_{1,3}^2 g_2$. Im ersten Fall ist unser $L^*$ das gesuchte Gitter.
Andernfalls können wir $L^*$ mit einer 6ten Einheitswurzel multiplizieren, so bleibt $g_3(\zeta L^*) = \zeta^{-6}g_3 = g_3$ und $g_2(\zeta L^*) = \zeta^{-4}g_2(L^*)$. Wenn nun $\zeta$ alle 6ten Einheitswurzeln durchläuft, so durchläuft $\zeta^{-4}$ alle dritten Einheitswurzeln.
Nach geeigneter Wahl von $\zeta$ gilt daher

$$g_2(\zeta L^*) = g_2 \text{ und } g_3(\zeta L^*) = g_3.$$

$\square$

Das Problem ist also auf die Frage zurückgeführt, ob jede komplexe Zahl die absolute Invariante eines Gitters ist. Daher fassen wir jetzt die Eisensteinreihen, die Diskriminante und die absolute Invariante als Funktionen auf der oberen Halbebene auf.

***Definition 1.14.:*** Sei $\tau \in \mathbb{H}$. Dann sind folgende Funktionen von $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$

- *Eisensteinreihe:* $G_k(\tau) = G_k(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) = \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \\ (c,d) \neq (0,0)}} (c\tau + d)^{-k} \; (k \geq 4)$
- $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$
- $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$
- $\Delta(\tau) = g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2$
- $j(\tau) = \dfrac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}$

Die Invarianzaussage $j(aL) = j(L)$ ist äquivalent mit der Invarianz von $j(\tau)$ unter der Modulgruppe:

$$j(M\tau) = j\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right) = j(\tau) \text{ für } M \in \Gamma$$

wegen Satz 1.6.

Nun werden wir mit funktionentheoretischen Mitteln unter wesentlicher Ausnutzung der obigen Invarianzbedingung zeigen, dass die $j$- Funktion surjektiv ist.

# 2 Die Modulfunktion $j$

**Vorbereitungen:** Es ist bekannt, dass die Eisensteinreihe

$$G_k(\tau) = \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}} (c\tau + d)^{-k}, \; \tau \in \mathbb{H}$$

für $k \geq 3$ absolut konvergiert (Vortrag über die $\wp$-Funktion, Satz 4). Außerdem ist bekannt, dass die Diskriminante $\Delta(\tau)$ keine Nullstelle in der oberen Halbebene hat.

***Hilfssatz 2.1.:*** Seien $C, \delta \in \mathbb{R}^+$. Dann existiert eine Zahl $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft

$$|c\tau + d| \geq \epsilon|ci + d| = \epsilon\sqrt{c^2 + d^2}$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$ mit $|Re(\tau)| \leq C$, $Im(\tau) \geq \delta$ und alle $(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

**Beweis:**

Offensichtlich gilt $|ci + d| = \sqrt{c^2 + d^2}$

- $(c,d) = (0,0)$: Dann gilt $|c\tau + d| = |0\tau + 0| = 0$ und für ein bel. $\epsilon$ gilt $\epsilon|ci + d| = \epsilon|0i + 0| = 0$. Damit gilt die Behauptung für diesen Fall.
- $(c,d) \neq (0,0)$: Wenn man $(c,d)$ durch $(tc, td)$ ersetzt, erhält man $|c\tau + d| = |tc\tau + td| = |t||c\tau + d|$ und $\epsilon|tci + td| = \epsilon|t||ci + d|$. Die Ungleichung ändert sich also nicht. Daher können wir $c^2 + d^2 = 1$ annehmen. Die Ungleichung lautet dann $|c\tau + d| \geq \epsilon$. Dann gilt:

  $$\begin{aligned} |c\tau + d|^2 &= (c(Re(\tau)) + d)^2 + (c(Im(\tau)))^2, \text{ da } c, d \in \mathbb{R} \\ &\geq (c(Re(\tau)) + d)^2 + (c\delta)^2 \\ &= |c\widehat{\tau} + d|^2, \text{ mit } \widehat{\tau} = Re(\tau) + i\delta \end{aligned}$$

  Die Funktion $f(c,d,u) = |c(u + i\delta) + d|$ ist positiv und nimmt auf dem durch $c^2 + d^2 = 1$, $|u| \leq C$ definiertem Kompaktum (Heine-Borel) in $\mathbb{R}^3$ ein positives Maximum $\epsilon$ an. Damit haben wir $|c\tau + d| \geq \epsilon$ gezeigt.

$\square$

Aus Lemma 1 (Vortrag über die $\wp$-Funktion) folgt damit, dass die Eisensteinreihe in den angegebenen Bereichen gleichmäßig konvergiert. Sie stellt insbesondere eine analytische Funktion dar. Wir halten fest:

***Satz 2.2.:*** Die Eisensteinreihe vom "Gewicht" $k \geq 3$

$$G_k(\tau) = \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}} (c\tau + d)^{-k}$$

definiert eine analytische Funktion auf der oberen Halbebene.
Insbesondere sind folgende Funktion analytisch in $\mathbb{H}$:

- $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$
- $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$
- $\Delta(\tau) = g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2$
- $j(\tau) = \dfrac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}$

***Bemerkung 2.3.:*** Es gilt

$$G_k\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right) = (\gamma\tau + \delta)^k G_k(\tau), \text{ für } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

**Beweis:**

$$c\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} + d = \frac{c\alpha\tau + c\beta + d\gamma\tau + d\delta}{\gamma\tau + \delta} = \frac{c'\tau + d'}{\gamma\tau + \delta}, \text{ mit } c' = c\alpha + d\gamma,\ d' = c\beta + d\delta$$

Mit $(c, d)$ durchläuft auch $(c', d')$ alle von $(0, 0)$ verschiedenen Paare ganzer Zahlen.

$$\begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix}$$

Damit gilt $G_k\left(\dfrac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right) = (\gamma\tau + \delta)^k G_k(\tau)$.

□

***Bemerkung 2.4.:***

- Die Eisensteinreihen sind insbesondere periodisch $G_k(\tau + 1) = G_k(\tau)$, da $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tau = \tau + 1$.
- Außerdem verschwinden sie für ungerades $k$:
  Die Substitution $(c, d) \to (-c, -d)$ zeigt $G_k(\tau) = (-1)^k G_k(\tau)$.

***Korollar 2.5.:*** Es gilt für gerades $k \geq 4$: $\lim\limits_{Im(\tau)\to\infty} G_k(\tau) = 2\zeta(k) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-k}$

**Beweis:**

Wegen der Periodizität von $G_k(\tau)$ ist es ausreichend, den Grenzübergang in dem Bereich $|Re(\tau)| \leq \frac{1}{2}$, $Im(\tau) \geq 1$ ($|Re(\tau)| \leq \frac{1}{2}$, da $G_k(\tau)$ periodisch ist und $Im(\tau) \geq 1$, da $Im(\tau)$ gegen Unendlich geht).
Da in diesem Bereich die Eisensteinreihe gleichmäßig konvergiert (Hilfssatz 2.1.), kann man den Grenzübergang gliedweise vollziehen.
Für $c \neq 0$ gilt: $\lim\limits_{Im(\tau)\to\infty} (c\tau + d)^{-k} = 0$
Für $c = 0$ gilt: $\lim\limits_{Im(\tau)\to\infty} (c\tau + d)^{-k} = d^{-k}$
Es folgt: $\lim\limits_{Im(\tau)\to\infty} G_k(\tau) = \sum\limits_{d\neq 0} d^{-k} = 2\sum\limits_{d=1}^{\infty} d^{-k}$

□

***Hilfssatz 2.6.:*** Es gilt: $\lim\limits_{Im(\tau)\to\infty} \Delta(\tau) = 0.$

**Beweis:**

Für die Diskriminante $\Delta(\tau)$ erhält man aus Korollar 2.5.:

$$\lim_{Im(\tau)\to\infty} \Delta(\tau) = \lim_{Im(\tau)\to\infty} [60 \cdot G_4(\tau)]^3 - 27 \cdot [140 \cdot G_6(\tau)]^2 = \lim_{Im(\tau)\to\infty} [60 \cdot 2\zeta(4)]^3 - 27 \cdot [140 \cdot 2\zeta(6)]^2$$

Mit $\zeta(4) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \dfrac{\pi^4}{90}$ und $\zeta(6) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-6} = \dfrac{\pi^6}{945}$ folgt die Behauptung. (Berechnet in Kapitel III.7.14)

□

***Satz 2.7.:*** Die j-Funktion ist eine analytische Funktion in der oberen Halbebene. Sie ist invariant unter der elliptischen Modulgruppe:

$$j\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = j(\tau), \text{ für } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$$

Es gilt $\lim\limits_{Im(\tau)\to\infty} |j(\tau)| = \infty.$

**Beweis:**

$$j\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \frac{g_2\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)^3}{\Delta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)} = j(\tau)$$

Außerdem gilt: $\lim\limits_{Im(\tau)\to\infty} |j(\tau)| = \lim\limits_{Im(\tau)\to\infty} \left|\dfrac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}\right| = \infty$

□

Allein aus diesen formulierten Eigenschaften werden wir auf die Surjektivität von $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ schließen.
Wir konstruieren nun ein Analogon zur Grundmasche eines Gitters.

***Satz 2.8.:*** Zu jedem Punkt $\tau$ der oberen Halbebene existiert eine Modulsubstitution $M \in \Gamma$, so dass $M\tau$ in dem Fundamentalbereich

$$\mathcal{F} = \{\tau \in \mathbb{H};\ |\tau| \geq 1,\ |Re(\tau)| \leq \tfrac{1}{2}\}$$

enthalten ist. (Durch die in Bemerkung 1.7. definierte Äquivalenzrelation wird $\mathbb{H}$ in eine disjunkte Menge von Äquivalenzklassen bzw. Bahnen eingeteilt. Wenn man die Vereinigung jeweils eines Punktes aus jeder Bahn betrachtet, erhält man den Fundamentalbereich.)
***Zusatz:*** Man kann sogar erreichen, dass $M$ in der von den beiden Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{"Spiegelung"},\ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{"Translation"}$$

erzeugten Untergruppe enthalten ist.

**Beweis:**

Sei $\tau \in \mathbb{H}$ beliebig. Wir erinnern an die Formel $Im(M\tau) = \dfrac{Im(\tau)}{|\gamma\tau + \delta|^2}$.
Wenn $(\gamma, \delta)$ irgendeine Folge von Paaren ganzer Zahlen durchläuft, wobei kein Paar doppelt auftreten soll, so gilt $|\gamma\tau + \delta| \to \infty$.
Man kann also eine Funktion $f : SL(2, \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}^+$ definieren, die jeder Matrix $M$ den Wert $Im(M\tau)$ zuordnet. Da $Im(M\tau)$ gegen 0 konvergiert, wenn $|\gamma\tau + \delta| \to \infty$, finden wir für eine feste Matrix $M' \in \Gamma$ ein Kompaktum $K$, sodass $f(M') \geq f(M'')$ wenn $M'' \notin K$. Da $K$ kompakt ist, finden wir für $f_{|K}$ ein Maximum $M_0$. Es existiert also eine Matrix $M_0 \in \Gamma$ =SL$(2, \mathbb{Z})$, so dass $Im(M_0\tau) \geq Im(M\tau)$ für alle $M \in \Gamma$ gilt.($\bigstar$)
Wir setzen $\tau_0 = M_0\tau$. Da sich der Imaginärteil von $t_0$ nicht ändert, wenn man $\tau_0$ durch

$$\tau_0 + n = \left[\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_0\right] \tau,\ (n \in \mathbb{Z})$$

ersetzt, können wir $|Re(\tau_0)| \leq \frac{1}{2}$ annehmen.
Wir nutzen die Ungleichung ($\bigstar$) speziell für $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot M_0$ aus und erhalten

$$Im(\tau_0) \geq Im\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tau_0\right) = \frac{Im(\tau_0)}{|\tau_0|^2}$$

Hieraus folgt $|\tau_0| \geq 1$.
Wenn man den Beweis analysiert, so sieht man, dass man die Gruppe $\Gamma$ durch die von $T$ und $S$ erzeugte Untergruppe ersetzten kann.

□

***Satz 2.9.:*** Die $j$-Funktion ist surjektiv, nimmt also jeden Wert aus $\mathbb{C}$ an.

**Beweis:** Nach dem Satz über Gebietstreue ist $j(\mathbb{H})$ ein offener Teil von $\mathbb{C}$. Wir werden zeigen, dass $j(\mathbb{H})$ auch abgeschlossen in $\mathbb{C}$. Hieraus folgt dann $j(\mathbb{H}) = \mathbb{C}$, da $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist. Wir wählen eine Folge von Punkten aus $j(\mathbb{H})$, welche gegen einen Punkt b konvergiert,

$$j(\tau_n) \to b \text{ für } n \to \infty.$$

Wir können und wollen annehmen, dass alle $\tau_n \in \mathcal{F}$ sind.

- *1.Fall:* Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass $Im(\tau_n) \leq C$ für alle $n$ gilt. Die Punktmenge $\{\tau \in \mathcal{F};\ Im(\tau) \leq C\}$ ist offenbar kompakt. Nach Übergang zu einer Teilfolge kann man annehmen, dass $(\tau_n)$ konvergiert $\tau_n \to \tau \in \mathcal{F} \subset \mathbb{H}$. Aus der Stetigkeit von $j$ folgt $b = j(\tau) \in j(\mathbb{H})$.
- *2.Fall:* Es existiert eine Teilfolge von $(\tau_n)$, deren Imaginärteile nach $\infty$ konvergieren. Die j-Werte dieser Teilfolge sind unbeschränkt! Daher kann $(j(\tau_n))$ nicht konvergieren. Dieser Fall kann also gar nicht eintreten.

Es gilt daher $b \in j(\mathbb{H})$ und damit ist $j(\mathbb{H})$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$.

□

# 3 Definitionen

1. **Gitter:** Eine Teilmenge $L \subset \mathbb{C}$ heißt Gitter, wenn es zwei $\mathbb{R}$-linear unabhängige "Vektoren" $w_1$ und $w_2$ in $\mathbb{C}$ gibt, so dass
$$L = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = \{mw_1 + nw_2; m, n \in \mathbb{Z}\}$$
gilt.

2. **elliptische Funktion:** Eine elliptische Funktion zum Gitter $L$ ist eine meromorphe Funktion
$$f : \mathbb{C} \to \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$
mit der Eigenschaft
$$f(z + w) = f(z) \text{ für } w \in L \text{ und } z \in \mathbb{C}.$$

3. **Meromorph:** Eine Abbildung
$$f : D \to \bar{\mathbb{C}}, D \subset \mathbb{C} \text{ offen}$$
heißt meromorphe Funktion, falls gilt:
   - Die Menge $S(f) = f^{-1}(\{\infty\})$ der Unendlichkeitsstellen von f ist diskret in D
   - Die Einschränkung von f,
   $$f_0 : D - S(f) \to \mathbb{C},$$
   ist analytisch
   - Die Punkte aus $S(f)$ sind Pole von $f_0$

4. $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}; Im(z) > 0\}$

5. **Drehstreckung:** $z \mapsto re^{i\phi} \cdot z + t$ mit $z \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\phi \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{C}$

6. **Möbiustransformation:** Eine rationale Funktion definiert genau dann eine bijektive Abbildung der Zahlkugel auf sich, wenn sie von der Gestalt $\dfrac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ist. Wir nennen solche Abbildungen gebrochen lineare Transformationen oder Möbiustransformationen, Jeder invertierbaren Matrix $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ist also eine Möbiustransformation $M\tau := \dfrac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$ zugeordnet. Im Fall $\gamma \neq 0$ wird diese Definition auf die ganze Riemannsche Zahlenkugel erweitert, indem man $f\left(\dfrac{-\delta}{\gamma}\right) = \infty$ und $f(\infty) = \dfrac{\alpha}{\gamma}$ definiert.
Im Fall $\gamma = 0$ definieren wir $f(\infty) = \infty$.
Damit ist $f(z)$ eine bijektive holomorphe Funktion der Riemannschen Zahlenkugel auf sich selbst.

7. **algebraische Differentialgleichung der $\wp$-Funktion:**
   - $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$
   - $g_2 = 60G_4 = 60 \sum\limits_{\omega \in L - \{0\}} \omega^{-4}$
   - $g_3 = 140G_6 = 140 \sum\limits_{\omega \in L - \{0\}} \omega^{-6}$

# 4 Quellen


- E. Freitag und R. Busam, Funktionentheorie 1, 4. korrigierte und erweiterte Auflage, Springer-Lehrbuch, 2006