

Seminar über Knotentheorie (Bachelor)

Wintersemester 2010/11, Janko Latschev

Inhaltlich geht es um eine Einführung in die Knotentheorie. Dabei liegt der Schwerpunkt auf Techniken, die ohne grosse Vorkenntnisse verständlich und benutzbar sind. Insbesondere setzen wir kaum Vorkenntnisse aus der Topologie voraus.

Das zentrale Ziel des Seminars ist, dass Sie lernen, selbständig ein Thema zu erarbeiten und das Gelernte in einem Vortrag weiterzugeben. Besondere Bedeutung hat dabei auch die Vortragsplanung: was führe ich im Detail aus? was lasse ich weg? Diese Fragen können Sie erst beantworten, wenn Sie den Stoff vollständig verstanden haben. **Fangen Sie darum frühzeitig mit der Vorbereitung an!** Für Fragen stehe ich natürlich zur Verfügung. Spätestens eine Woche vor Ihrem Vortragstermin geben Sie mir bitte eine Gliederung Ihres Vortrages ab.

Vorträge

- (1) **Was ist ein Knoten?** Definieren Sie Knoten und ihre Äquivalenz, sowie reguläre Knotendiagramme. Verallgemeinern Sie die Begriffe für Verschlingungen, und veranschaulichen Sie sie mit möglichst vielen Beispielen. Diskutieren Sie Orientierungen von Knoten und Verschlingungen. [6, §2]
- (2) **Erste kombinatorische Techniken** Erklären Sie die Reidemeister-Bewegungen, und diskutieren Sie die Aussage, dass Diagramme äquivalenter Knoten durch solche ineinander überführt werden können. Geben Sie Beispiele. Definieren Sie Färbbarkeit, diskutieren Sie Beispiele und beweisen Sie die Existenz nichttrivialer Knoten. [6, §3], [1, §1.3], [7, §1]
- (3) **Diverse Konstruktionen** Diskutieren Sie die zusammenhängende Summe von Knoten, und formulieren Sie den Primzerlegungssatz. Führen Sie Torusknoten und Satellitenknoten ein und geben Sie Beispiele. Definieren Sie die Verschlingungszahl zweier Komponenten einer Verschlingung und geben Sie Beispiele. [1, §1.2 und §1.4, §5.1 und §5.2], [6, §4.5]
- (4) **Das Jones-Polynom** Erläutern Sie die Konstruktion des Jones-Polynoms aus Kauffmans Klammerpolynom. Geben Sie Beispiele für die Berechnung an, und diskutieren Sie das Verhalten bei zusammenhängender Summe und disjunkter Vereinigung von Knoten. [7, §3], [1, §6.1]
- (5) **Alternierende Knoten** Führen Sie den Begriff des alternierenden Knotens ein und beschreiben Sie Dowkers Notation für diese. Diskutieren Sie die minimale Kreuzungszahl für alternierende Knoten. [1, §2.2 und §6.2]
- (6) **Das Alexander-Polynom** Diskutieren Sie die Determinante eines Knotens, und geben Sie Beispiele. Führen Sie das Alexander-Polynom wie in [6, §3.4 und §3.5] ein und berechnen Sie es für verschiedene Beispiele. Erläutern Sie die alternative Formulierung in [1, §6.3].

- (7) **Geometrische Techniken** Diskutieren Sie die Klassifikation der kompakten Flächen bis auf Homöomorphismus. Beschreiben Sie die Konstruktion einer Seifert-Fäche zu einem gegebenen Knotendiagramm. Geben Sie Beispiele. [6, §4] [1, §4]
- (8) **Algebraische Techniken** Diskutieren Sie Etikettierungen von Knotendiagrammen und den Etikettierungssatz. Erläutern Sie den Begriff der Präsentation einer Gruppe and einfachen Beispielen, und führen Sie die Knotengruppe ein. [6, §5]
- (9) **Seifert-Matrizen und das Alexander-Polynom** Führen Sie den Begriff der Seifert-Matrix ein, und geben Sie Beispiele für die Berechnung. Diskutieren Sie den Zusammenhang mit dem Alexander-Polynom und die Beziehung zur Determinante. [6, §6]
- (10) **Zöpfe und Knoten** Führen Sie die Zopfgruppe(n) ein und erklären Sie, wie man aus einem Zopf eine Verschlingung erhält. Diskutieren Sie die Sätze von Alexander und Markov, und geben Sie Beispiele. [7, §5 und §6]
- (11) **Numerische Knoteninvarianten** Diskutieren Sie einige der in den Büchern vorgestellten numerischen Invarianten, und berechnen Sie diese in Beispielen. Diskutieren Sie Beziehungen zwischen den gewählten Invarianten. [6, §7] [1, §3]
- (12) **Symmetrien von Knoten** Definieren Sie Umkehrbarkeit und Chiralität von Knoten und diskutieren Sie Beispiele. Führen Sie periodische Knoten ein und diskutieren Sie notwendige Bedingungen für Periodizität. [6, §8]
- (13) **Der Satz von Călugăreanu** Erläutern Sie den Satz von Călugăreanu (mit Beweis), und diskutieren Sie seine praktische Bedeutung. [3] und darin enthaltene Referenzen, [1, §7]

References

- [1] C. C. Adams, *The Knot Book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots*, AMS, 1994
- [2] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, 2. Auflage, de Gruyter, 2003
- [3] M. R. Dennis und J. H. Hannay, *Geometry of Călugăreanu's theorem*, Proc. R. Soc. A, **461**, 3245–3254, 2005
- [4] A. Kawauchi, *A Survey of Knot Theory*, Birkhäuser, 1996
- [5] W. B. R. Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, Springer, 1997
- [6] C. Livingston, *Knotentheorie für Einsteiger*, Vieweg, 1995
- [7] V. V. Prasolov und A. B. Sossinsky, *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*, AMS, 1997
- [8] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, 1976, Reprint: AMS, 2003