Universität Hamburg
Janko Latschev
Leonardo García Heveling

Sommer 2025

Funktionentheorie

Übungsblatt 13

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P40) Benutzen Sie die Partialbruchentwicklung

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

aus der Vorlesung, um die Identität

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

zu beweisen.

(P41) Zu einem Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ betrachten wir die Weierstraßsche $\mathfrak{p}$-Funktion

$$\mathfrak{p}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w\in\Lambda, w\neq 0} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right).$$

Obwohl $\mathfrak{p}$ Lösung der Λ-invarianten Hauptteilverteilung $\left\{\frac{1}{(z-w)^2}\right\}_{w\in\Lambda}$ ist, wird aus der Definition nicht sofort klar, dass $\mathfrak{p}$ selbst auch Λ-invariant ist.[1] Zeigen Sie die Λ-Invarianz von $\mathfrak{p}$ in folgenden Schritten:

a) Bestimmen Sie die Ableitung $\mathfrak{p}'$. Ist sie Λ-invariant?

b) Benutzen Sie Teil **a)** um zu zeigen, dass für festes $w_0 \in \Lambda$ die Differenz $\mathfrak{p}(z+w_0) - \mathfrak{p}(z)$ eine konstante Funktion von $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ ist.

c) Was können Sie über die Differenz $\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(-z)$ sagen? Benutzen Sie dies, um die Λ-Invarianz von $\mathfrak{p}$ zu beweisen.

[1] Für die ebenfalls Λ-invariante Hauptteilverteilung $\left\{\frac{1}{z-w}\right\}_{w\in\Lambda}$ gibt es zum Beispiel gar keine Λ-invariante Lösung.

Bitte wenden!

In dieser Woche gibt es keine abzugebenden Hausaufgaben mehr. Stattdessen sind hier einige Aufgaben zur Vorbereitung der Klausur. Diese Aufgaben haben ihren Schwerpunkt beim Argumentieren. In der Klausur wird es natürlich auch Rechenaufgaben geben.

(A53) Gehen Sie noch einmal die Integralberechnungsaufgaben auf den früheren Übungsblättern durch, und überlegen Sie sich bei jedem dieser Integrale, welche der Ihnen inzwischen bekannten Berechnungsmethoden die effizienteste wäre.

(A54) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig und auf $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ holomorph, dann ist f eine ganze Funktion, also in ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

(A55) Finden Sie alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eingeschaften:

- f hat eine doppelte Nullstelle in $z_0 = 0$
- für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|f'(z)| \leq 10|z|$
- $f(\mathbf{i}) = 3$

(A56) Finden Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 3$ und $|f(z)| \leq 3$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

(A57) **a)** Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig und in G holomorph. Wir nehmen außerdem an, dass eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|f(z)| = c$ für alle $z \in \overline{G} \setminus G$. Zeigen Sie, dass f konstant ist oder in G eine Nullstelle besitzt.

b) Finden Sie ein Gegenbeispiel für den Fall, dass G nicht beschränkt ist.

(A58) Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit einer Nullstelle der Ordnung $m \geq 1$ bei $z_0 = 0$, so gilt

$$|f(z)| \leq |z|^m$$

für alle $z \in \mathbb{D}$.

(A59) **a)** Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Bestimmen Sie für komplexe Zahlen $a \neq b$ und einen beliebigen Radius $R > \max(|a|, |b|)$ das Integral

$$I_{a,b} := \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$

b) Verwenden Sie das Ergebnis, um einen alternativen Beweis des Satzes von Liouville zu geben.

Siehe nächstes Blatt!

(A60) Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ gegeben. Wieviele Lösungen hat die Gleichung

$$az^n = e^{z+1}$$

in der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$?

(A61) Bestimmen Sie $0 < r < 1$, so dass eine Möbiustransformation existiert, die den Kreisring $K(0; r, 1)$ biholomorph auf das Gebiet $B(0,2) \setminus \overline{B(\frac{5}{8}, \frac{7}{8})}$ abbildet.