

FUNKTIONENTHEORIE

Übungsblatt 12

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P37) Beweisen Sie: Ist $f = \frac{p}{q}$ eine rationale Funktion mit $\deg p < \deg q$, so ist f Summe seiner Hauptteile (d.h. der holomorphen “Restterm” verschwindet).

(P38) Für $\epsilon > 0$ genügend klein besitzt die meromorphe Funktion $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ in $K(0; 0, \epsilon)$ eine Darstellung als Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Konvergiert diese Reihe in $z = 3 + 4i$?

Hinweis: Sie sollten diese Frage beantworten, ohne die Reihe explizit zu bestimmen!

(P39) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklungen von

$$g(z) = \frac{1}{z(z+1)}$$

auf den Kreisingen $K(0; 0, 1)$ und $K(0; 1, \infty)$!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 7.7. in der Vorlesung.

(A49) a) Wieviele Nullstellen hat

$$f(z) = z^7 - 8z^5 + 15z^2 - iz + 1$$

in $B(0, 1)$, und wieviele in $B(0, 2) \setminus \overline{B(0, 1)}$?

b) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $\operatorname{Re} \lambda > 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ genau eine Lösung in der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ hat. Ist λ reell, so ist auch die Lösung reell.

c) (*optional*) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$z^3 e^{1-z} = 1$$

genau zwei Lösungen in $B(0, 1)$ hat.

(A50) a) Formulieren und beweisen Sie eine Version des Satzes von Rouché für auf ganz $\mathbb{C}$ definierte meromorphe Funktionen.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der meromorphen Funktion

$$f(z) = \frac{3}{z^2} - 15z^2 + 7i$$

in der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$.

(A51) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklungen von

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

auf $K(2; 0, 1)$ und $K(2; 1, \infty)$.

(A52) a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ohne Nullstellen. Zeigen Sie: Es existiert genau dann eine holomorphe Funktion $h : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = (h(z))^n$, falls für alle geschlossenen Kurven γ in G die Windungszahl $w(f \circ \gamma, 0)$ durch n teilbar ist. Eine solche Funktion h nennt man *n-te Wurzel von f*.

Ansatz: Wählen Sie $z_0 \in G$ und beschreiben Sie h als

$$h(z) = c \exp \left(\frac{1}{n} \int_{z_0}^z \frac{f'(w)}{f(w)} dw \right)$$

für eine geeignete Konstante $c \in \mathbb{C}^$, wobei die Integration entlang einem beliebigen Weg von z_0 nach z in G stattfindet.*

b) Was ist die kleinste kompakte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$, so dass $f(z) = z^2 - 1$ auf $\mathbb{C} \setminus A$ eine Quadratwurzel besitzt?