

FUNKTIONENTHEORIE

Übungsblatt 11

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P34) Sei f eine rationale Funktion der Form $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit $\deg p \leq \deg q - 2$. Zeigen Sie, dass die Summe aller Residuen von f verschwindet!

(P35) In der Vorlesung wurde behauptet, dass für Polynome p und q mit $\deg p \leq \deg q - 2$, wobei der Nenner q auf $[0, \infty)$ keine Nullstellen hat, und für einen *beliebigen* Zweig $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ des komplexen Logarithmus die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{p(x)}{q(x)} \log(x) dx = -\frac{1}{2} \sum_{a \neq 0} \text{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} (\text{Log}(z))^2, a \right) - \pi i \int_0^\infty \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

gilt (wobei im Integral links stets der übliche reelle Logarithmus verwendet wird). Verschiedene Zweige des komplexen Logarithmus unterscheiden sich allerdings um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$, so dass die Formel je nach Wahl des Zweiges verschiedene Aussagen zu liefern scheint. Muss die Behauptung also korrigiert werden, oder was geht hier vor?

(P36) Für eine meromorphe Funktion $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ definiert man das *Residuum in Unendlich* als

$$\text{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) dz,$$

wobei R so groß gewählt werden muss, dass der Ball $B(0, R)$ alle Polstellen von f in $\mathbb{C}$ (alle *endlichen* Polstellen) enthält.

a) Können Sie erklären, warum in der Definition ein negatives Vorzeichen auftritt?

b) Zeigen Sie

$$\text{Res}(f(z), \infty) = -\text{Res} \left(f \left(\frac{1}{z} \right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0 \right).$$

c) Bestimmen Sie für $k \in \mathbb{Z}$ die Residuen von $f_k(z) = z^k$ in Unendlich.

d) Zeigen Sie, dass die Summe *aller* Residuen einer meromorphen Funktion $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ verschwindet.

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 30.7. in der Vorlesung.

- (A44) Beweisen Sie mit Hilfe des Residuensatzes: Ist $f : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ injektiv und holomorph und ist $0 < \varrho < r$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(B(z_0, \varrho)) \rightarrow B(z_0, \varrho)$ durch die Formel

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \varrho)} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz$$

gegeben.

- (A45) Beweisen Sie:

- a) Das Residuum einer holomorphen Funktion $f : B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ in $z_0 \in \mathbb{C}$ ist die eindeutig bestimmte komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$, so dass die Funktion

$$f(z) - \frac{c}{z - z_0}$$

in $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ eine Stammfunktion besitzt.

Hinweis: Der Inhalt von (A40) c) kann hier hilfreich sein.

- b) Ist $g : B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so gilt $\text{Res}(g', z_0) = 0$.

- (A46) Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

a) $\int_{\partial B(0,1)} \frac{e^{iz}}{z^3} dz,$

b) $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx,$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin^2(x)},$

d) $\int_0^\infty \frac{x}{x^4 + 1} dx.$

- (A47) Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung der abgeschlossenen oberen Halbebene $\overline{\mathbb{H}}$, und sei $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ meromorph mit endlich vielen Polstellen in $\mathbb{H}$ und genau einer Polstelle $a \in \mathbb{R}$, welche einfach ist. Wir nehmen außerdem an, dass $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$ (dies gilt zum Beispiel, falls $g(z)$ eine rationale Funktion $\frac{p(z)}{q(z)}$ mit $\deg p < \deg q$ ist). Wir setzen $f(z) := g(z)e^{iz}$.

Beweisen Sie:

- a) $\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = -\pi i \text{Res}(f, a)$, wobei der Weg $\gamma_\rho : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\gamma_\rho(t) = a + \rho e^{i(\pi-t)}$ beschrieben ist.

- b) Es gilt

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx = \pi i \text{Res}(f, a) + 2\pi i \sum_{z \in \mathbb{H}} \text{Res}(f, z).$$

Hinweis: Passen Sie die "Rechteckmethode" aus der Vorlesung für die hier betrachtete Situation an.

Siehe nächstes Blatt!

c) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$

(A48) Zum weiteren (optionalen) Üben sind hier noch einige weitere Integrale angegeben, die sich mit den in der Vorlesung vorgestellten Methoden berechnen lassen.

a) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{(5 - 3\cos(t))^4} dt = \frac{135\pi}{2^{14}} = \frac{135\pi}{16384}.$

b) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(3t)}{5 - 3\cos(t)} dt = 0.$

c) $\int_0^\infty \frac{x^2}{1 + x^6} dx = \frac{\pi}{6}.$

d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2} = \frac{\pi}{2}.$

e) Für $n \in \mathbb{N}$ und positive reelle Konstanten a und b gilt

$$\int_0^\infty \frac{1}{(a^2 + b^2 x^2)^n} dx = \frac{(2n-2)! \pi}{b(2a)^{2n-1}((n-1)!)^2}.$$

f) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x \cos(x)}{x^2 + ax + b} dx = \left(\sin\left(\frac{a}{2}\right) - \frac{a}{2\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}} \cos\left(\frac{a}{2}\right) \right) \pi e^{-\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}, \text{ falls } b > \frac{a^2}{4}.$

g) $\int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi \log(a)}{2a}, \text{ falls } a > 0.$

h) $\int_0^\infty \frac{\log(x)}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{\pi}{4}.$