

FUNKTIONENTHEORIE

Übungsblatt 10

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P31) Geben Sie eine (eventuell stückweise) stetig differenzierbare geschlossene Kurve γ in $\mathbb{C}$ an, so dass das Komplement des Bildes genau 4 Komponenten besitzt, auf denen die Umlaufzahl die Werte -1 , 0 , 2 und 3 annimmt!

(P32) Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen an allen ihren Singularitäten:

a) $\frac{1-\cos(z)}{z}$ b) $\frac{1}{(z^2+1)^3}$ c) $\frac{1}{\cos(\pi z)}$

(P33) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein funktionentheoretisch einfach zusammenhängendes Gebiet, und sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ohne Nullstellen. Zeigen Sie:

a) Es existiert eine holomorphe Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$, so dass

$$e^{g(z)} = f(z) \quad \text{für alle } z \in G.$$

Hinweis: Dies ist eine Verallgemeinerung der Aussage von Aufgabe (A14).

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine holomorphe Funktion $h : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$h(z)^n = f(z).$$

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 23.6. in der Vorlesung.

- (A40) Ziel dieser Aufgabe ist es, die in der Vorlesung behauptete Aussage zu beweisen, dass Umlaufzahlen stets ganze Zahlen sind. Sei dafür $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$, und sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$. Sei außerdem eine komplexe Zahl $h(a) \in \mathbb{C}$ so gewählt, dass

$$e^{h(a)} = \gamma(a) - z_0.$$

- a) Wir definieren die Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$h(t) := h(a) + \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds.$$

Was ist die Ableitung von h in einem Punkt $t \in [a, b]$? Zeigen Sie, dass für alle $t \in [a, b]$ die Gleichung

$$e^{h(t)} = \gamma(t) - z_0$$

erfüllt ist.

- b) Benutzen Sie die Eigenschaften der Funktion h , um zu beweisen, dass $w(\gamma, z_0)$ eine ganze Zahl sein muss.
- c) Sei nun $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ eine glatte Schleife in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und sei $k = w(\gamma, 0) \in \mathbb{Z}$ ihre Umlaufzahl um 0. Beweisen Sie, dass γ in $\mathbb{C}^*$ homotop durch glatte Schleifen zur Schleife $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_k(t) = e^{2\pi i k t}$ ist.

- (A41) Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis der folgenden Aussage:

Ist $U \subset \mathbb{C}$ funktionentheoretisch einfach zusammenhängend, so ist das Komplement $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ von U in $\overline{\mathbb{C}}$ zusammenhängend.

Sei dazu $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, so dass $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ nicht zusammenhängend ist. Zeigen Sie:

- a) Es existiert eine nichtleere kompakte Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ und eine abgeschlossene Teilmenge $B \subset \mathbb{C}$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = \mathbb{C} \setminus U$.
- b) Sind A und B wie in Teil a) beide nicht leer, so gilt $\delta := \inf \{|a - b| : a \in A, b \in B\} > 0$.
- c) Zu jedem $a \in A$ existiert eine geschlossene Kurve γ in U , so dass die Umlaufzahl $w(\gamma, a) = 1$ ist.
Vorschlag: Konstruieren Sie γ als Rand einer geeigneten Überdeckung von A durch hinreichend kleine abgeschlossene Quadrate, von denen genau eines den Punkt a in seinem Inneren enthält.

Siehe nächstes Blatt!

(A42) a) Zeigen Sie: Sind G_1 und G_2 Gebiete in $\mathbb{C}$, welche funktionentheoretisch einfach zusammenhängend sind, und ist $G_1 \cap G_2$ zusammenhängend, so ist auch $G_1 \cup G_2$ funktionentheoretisch einfach zusammenhängend.

b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Behauptung nicht gelten muss, wenn $G_1 \cap G_2$ nicht zusammenhängend ist.

c) Geben Sie mindestens zwei möglichst verschiedene Beispiele von funktionentheoretisch einfach zusammenhängenden Gebieten an, die nicht sternförmig sind!

Zur Beschreibung der Mengen genügt jeweils eine Skizze. Dazu wird noch eine kurze Begründung erwartet, warum die Mengen die verlangten Eigenschaften haben.

(A43) Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen an allen ihren Singularitäten:

a) $\frac{z^3}{(1+z)^3}$

b) $\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$

c) $\frac{1}{e^z+1}$

d) $\frac{1-\cos(z)}{z^3}$

e) $\tan(\pi z)$