

Differentialgeometrie

Janko Latschev

Sommersemester 2024

Themenliste für die Prüfung

1. Grundlagen

- (a) verschiedene äquivalente Definitionen für Untermannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n (als Hintergrundwissen)
- (b) Definitionen: (glatte) Mannigfaltigkeit, Tangentialvektor (verschiedene äquivalente Beschreibungen), glatte Abbildung, Differential einer Abbildung, Immersion, Submersion und Einbettung mit Beispielen dazu
- (c) Satz vom regulären Wert (mit Beweis) und Transversalität, Anwendungen davon
- (d) Vektorbündel: Definition und Beispiele, insbesondere TM und T^*M
- (e) Lieklammer: Definition, Eigenschaften und Rechenregeln
- (f) Integralkurven von Vektorfeldern und Flüsse
- (g) Lieableitung von Vektorfeldern und ihre Beziehung zur Lieklammer
- (h) Vektorfelder kommutieren genau dann, wenn ihre Flüsse kommutieren
- (i) Lieableitung von Differentialformen, Definition und Berechnung in Beispielen (Cartanformel mit Beweisstrategie)
- (j) Liegruppen: Definition und Beispiele
- (k) Liealgebra einer Liegruppe, linksinvariante Vektorfelder, Liegruppenhomomorphismen induzieren Liealgebrahomomorphismen (Beweis)
- (l) (gruppentheoretische) Exponentialabbildung einer Liegruppe, Zusammenhang zu 1-Parameter-Untergruppen
- (m) Satz von Frobenius (Kontext, Formulierung und Beispiele)

2. Kovariante Ableitungen

- (a) Motivation und Definition der kovarianten Ableitung
- (b) Beschreibung einer kovarianten Ableitung auf dem Tangentialbündel in lokalen Koordinaten (Christoffel-Symbole)
- (c) Tensorfelder, kovariante Ableitung von Tensorfeldern
- (d) Krümmung und Torsion, Beispiele dazu
- (e) Vektorfelder entlang einer Abbildung und deren kovariante Ableitung
- (f) Paralleltransport entlang einer Kurve, Beziehung zur Krümmung

3. Elemente der (pseudo-)Riemannschen Geometrie

- (a) Definition (pseudo-)Riemannsche Metrik, Beispiele
- (b) Existenz und Eindeutigkeit des Levi-Civita-Zusammenhangs (mit Beweis)
- (c) Längen und Abstände in Riemannschen Mannigfaltigkeiten
- (d) Geodätische Kurven
- (e) Riemannsche Exponentialabbildung, Gauß-Lemma (mit Beweis)
- (f) abstandsminimierende Kurven sind Geodätische (mit Beweisidee)
- (g) Satz von Hopf und Rinow (mit Beweisidee)
- (h) Definition Schnittkrümmung, Beispiele
 - (i) Gaußkrümmung für Flächen im \mathbb{R}^3 , Theorema egregium (mit Beweisidee)
 - (j) Vektorfelder entlang einer Kurve als Tangentialraum an den Raum der Kurven
- (k) Energiefunktional für parametrisierte Kurven, erste und zweite Variationsformel
- (l) Jacobifelder und ihre Anwendungen (Cartan-Hadamard-Satz, Satz von Bonnet und Myers)
- (m) Satz von Gauß-Bonnet für Flächen (Aussage und Beweisstrategie)

Hinweise für die Vorbereitung auf die mündliche Prüfung

Eine mündliche Prüfung ist idealerweise ein Gespräch über die Inhalte der Vorlesung, bei dem Sie die Gelegenheit haben, neu erworbenes Wissen und Verständnis zu demonstrieren. Natürlich sollten Sie dafür die Definitionen der Standardbegriffe und die Aussagen und Beweise der wichtigen Sätze kennen, aber ebenso wichtig ist das Verständnis von illustrativen Beispielen und Gegenbeispielen. Besonders hoch angesehen sind dabei Beispiele, die Sie sich selbst überlegt haben.

Darüber hinaus sind viele Fragen von einem der folgenden Typen: Was passiert, wenn man in der Formulierung eines Satzes eine der Voraussetzungen weglässt oder durch eine andere Bedingung ersetzt? Kennen Sie Gegenbeispiele? Was ist eine einfache Situation, in der Satz X anwendbar ist? Wofür ist Konzept Y nützlich? Kann es ein Objekt (z.B. eine Mannigfaltigkeit) mit den Eigenschaften E_1 , E_2 und/oder E_3 geben? Kennen Sie ein konkretes Beispiel? Gibt es eine Abbildung, die den Effekt Z hat? Für komplizierte Rechnungen ist in einer mündlichen Prüfung erfahrungsgemäß keine Zeit, aber einfache Rechnungen oder eine Frage nach dem prinzipiellen Rechenweg für ein komplexeres Problem können durchaus vorkommen.

Es ist außerdem hilfreich, bei der Vorbereitung auf die Prüfung noch einmal die Übungsaufgaben zu studieren, da sie oft Aspekte der Theorie beleuchten, die in der Vorlesung nicht oder nur am Rande behandelt wurden. Auch die Bücher der Literaturliste geben oft eine nützliche alternative Perspektive auf den Stoff.

Die mündliche Prüfung dauert etwa 25 Minuten. Im Idealfall (also wenn Sie gut vorbereitet sind) vergeht diese Zeit sehr schnell. Kurze Denkpausen sind selbstverständlich erlaubt, aber wenn Sie bei jeder Frage ins Stocken geraten oder wir das Gefühl bekommen, dass Sie "auf Zeit spielen" und wir dadurch weniger Themen behandeln, wirkt sich das negativ auf die Bewertung aus.