Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2024

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 8

Präsenzaufgaben

(P17) Sei $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^k$ eine Einbettung einer n-dimensionalen Untermannigfaltigkeit. In jedem Punkt $p \in M$ ist $T_pM \subset T_p\mathbb{R}^k$ ein linearer Unterraum, und wir bezeichnen mit $\pi_p : T_p\mathbb{R}^k \to T_pM$ die orthogonale Projektion (bezüglich der Standardmetrik g_{st} des $\mathbb{R}^k$).

a) Der Levi-Civita-Zusammenhang ∇ der von der Standardmetrik g_{st} auf $\mathbb{R}^k$ induzierten Metrik g auf M erfüllt

$$(\nabla_X Y)_p = \left(\nabla^{\mathbb{R}^k}_{X_p}(\iota_* Y)\right)^\top = \pi_p\left(\nabla^{\mathbb{R}^k}_{X_p}(\iota_* Y)\right).$$

Insbesondere ist ein Vektorfeld $Y \in \Gamma_\gamma(TM)$ parallel entlang einer Kurve $\gamma : [a,b] \to M$, falls die gewöhnliche Ableitung von Y in jedem Punkt $\gamma(t)$ orthogonal bezüglich g_{st} zu M (genauer zu $T_{\gamma(t)}M$) ist.

b) Wir betrachten nun den Spezialfall $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Seien v und w Vektoren der Länge 1 im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $v \perp w$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Geodätische $\gamma_{w,v}$ mit Startpunkt $\gamma_{w,v}(0) = w \in S^n$ mit dem Startvektor $\dot\gamma_{w,v}(0) = v \in T_pS^n$ durch die Formel

$$\gamma_{w,v}(t) = \cos(t)w + \sin(t)v$$

gegeben ist.

c) Sei nun $n = 2$. Nach Teil **b)** wissen wir, dass die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to S^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ eine Geodätische ist, d.h. ihr Tangentialvektor ist parallel entlang γ. Finden Sie das entlang der Kurve γ parallele Vektorfeld Y auf S^2 mit Startwert $Y_0 = \partial_{x_3} \in T_{(1,0,0)}S^2$.

d) Bestimmen Sie (mit möglichst wenig Rechnung) den Paralleltransport entlang der Seiten des sphärischen Dreiecks $\Delta \subseteq S^2$ mit den Eckpunkten $p_1 = (1,0,0)$, $p_2 = (0,0,1)$ und $p_3 = (0,-1,0)$ (welche in der Reihenfolge $p_1 \to p_2 \to p_3 \to p_1$ durchlaufen werden sollen) – gesucht ist also eine lineare Abbildung $\Pi_\Delta : T_{p_1}S^2 \to T_{p_1}S^2$.

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 20.6., in der Vorlesung

(A22) In der Vorlesung haben wir die *Koszul-Formel* für den Levi-Civita-Zusammenhang einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) gesehen:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]).$$

a) Leiten Sie daraus die folgende Berechnungsformel für die Christoffel-Symbole des Zusammenhangs in lokalen Koordinaten $(x_1, \dots, x_n)$ auf $U \subset M$ her:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell} \right),$$

wobei $g^{k\ell}$ die Koeffizienten der zu $(g_{\ell k})$ inversen Matrix bezeichnet.

b) Berechnen Sie die lokalen Koeffizienten der Standardmetrik auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und die Christoffel-Symbole ihres Levi-Civita-Zusammenhangs in den Koordinaten (φ, ϑ), welche durch die Karte $\psi : S^2 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\} \to (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit

$$\psi^{-1}(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

gegeben sind.
Hinweis: Wenn Sie Symmetrien nutzen, können Sie den Rechenaufwand verkleinern.

(A23) Sei $\mathbb{H} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ die obere Halbebene, welche wir mit der Riemannschen Metrik $h = \frac{1}{x_2^2} g_{\mathrm{st}}$ versehen. Die Koeffizientenfunktionen bezüglich der Standardkoordinaten (x_1, x_2) sind also

$$h_{ij}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2^2} \delta_{ij}.$$

a) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole des Levi-Civita-Zusammenhangs dieser Metrik!

b) Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ die Kurve $c(t) = (t, 1)$. Bestimmen Sie das entlang c parallele Vektorfeld $Y \in \Gamma_c(T\mathbb{H})$, das in $t = 0$ den Wert $Y_0 = \partial_{x_2}|_{(0,1)} \in T_{(0,1)}\mathbb{H}$ hat!

c) Zeigen Sie, dass für jede Konstante $x_1 \in \mathbb{R}$ die Kurve $\gamma(t) = (x_1, e^t)$ eine Geodätische für die Metrik h auf $\mathbb{H}$ ist.