Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik II für Studierende der Physik: Blatt 12 zur Abgabe am 10.7.2019 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(1-t^2)x' - tx + t^2 - 1 = 0, \quad t \in (-1,1).$$

Aufgabe 2: (2 Punkte)
Wenden Sie das Picard-Lindelöfsche Iterationsverfahren auf das Differentialgleichungssystem

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an. Führen Sie die ersten drei Schritte aus.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Geben Sie alle Integralkurven $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Vektorfelds

$$V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \longmapsto V(x,y) = (1, 1+y^2)$$

in Abhängigkeit von der Anfangsbedingung $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ an.
Bestimmen Sie jeweils auch das maximale Definitionsintervall der Lösung und skizzieren Sie, wie sich die Lösungen verhalten. Diskutieren Sie, wie sich jeweils eine Störung von x_0 bzw. von y_0 auf das Verhalten der Lösung auswirkt.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Finden Sie ein Lösungsfundamentalsystem aus reellwertigen Funktionen des Differentialgleichungssystems

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} x.$$

Aufgabe 5: (2+0 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gerade. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 + \ldots + x_n - x_1 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen für die (lokale) differenzierbare Auflösbarkeit der Gleichung $f(x) - f(p) = 0$, $p \in \mathbb{R}^n$, nach mindestens einer der Koordinaten x_i $(i = 1, \ldots, n)$ in einer Umgebung U von p genau dann erfüllt sind, wenn $p \neq (1, \ldots, 1)$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f im kritischen Punkt $p_0 = (1, \ldots, 1)$. Ist p_0 ein lokaler Extrempunkt von f?