Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik II für Studierende der Physik: Blatt 11 zur Abgabe am 3.7.2019 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $x' = \sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$, unendlich viele verschiedene stetig differenzierbare Lösungen hat.

Aufgabe 2: (2+2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Lösung $x = x(t)$ der Differentialgleichung $x' = e^x \sin(t)$ zu der Anfangsbedingung $x(\pi/2) = 0$. Geben Sie auch das maximale Intervall um $t = \pi/2$ an, auf dem die Lösung definiert ist.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $x' = 4e^t + e^t x^2$ zu der Anfangsbedingung $x(0) = 1$. Geben Sie auch das maximale Intervall um $t = 0$ an, auf dem die Lösung definiert ist.

Hinweis: Für die Lösung kann es nützlich sein zu wissen, dass $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Aufgabe 3: (2 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$x' = \frac{t - x}{t} \quad \text{für} \quad t > 0.$$

Geben Sie an, auf welchem (maximalen) Intervall um $t = 1$ die Lösung definiert ist.

Aufgabe 4: (3+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$x' = x\tan(t) - 2\sin(t) \quad \text{für} \quad -\pi/2 < t < \pi/2.$$

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $x(t)$ der Differentialgleichung

$$x' = \frac{tx^2 - t\,x}{1 + t^2},$$

für die $x(t) \neq 0$ für alle t gilt.

Aufgabe 5: (2 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$3t^2 + xe^{tx} + te^{tx}x' = 0.$$

Aufgabe 6: (0 Punkte)
Bestimmen Sie bei den folgenden Aufgaben jeweils den Typ der Differentialgleichung, d.h. geben Sie ein mögliches Lösungsverfahren an.
Hinweis: Bei einzelnen Gleichungen bietet sich an, zunächst eine Substitution durchzuführen.

- $\frac{dx}{dy} = -x\left(\frac{2x^2y+cosy}{3x^2y^2+\sin y}\right)$.
- $y' + 3y = te^{-3t}$.
- $x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2+y^2}$.
- $\frac{y'-1}{x^2} = 1$.
- $y'' = \frac{y(y-1)}{y'}$.
- $t\frac{ds}{dt} = s(1 - \ln t + \ln s)$.
- $\frac{dy}{dt} = \frac{3-2y}{2x+y+1}$.
- $x^2y' + xy + y^2 = 0$.
- $y' \tan(x+y) = 1 - \tan(x+y)$.
- $y\,ds - 3s\,dy = y^4dy$.
- $du = -\frac{1+u\cos^2 t}{t\cos^2 t}\,dt$.
- $y' + y^2 + (2x+1)y + 1 + x + x^2 = 0$.
- $y'' + x^2y' + 3x^3 = \sin x$.

Sie können auch versuchen, jeweils die allgemeine Lösung oder eine maximale Lösung mit konkreten Anfangsbedingungen zu bestimmen.