Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik II für Studierende der Physik: Wiederholungsblatt (Keine Abgabe).

Die folgenden Aufgaben sind als Angebote zur Wiederholung und Vertiefung gedacht. Lösungen werden nicht korrigiert. Es ist auch nicht vorgesehen, diese in den Übungen zu besprechen, bei Bedarf können aber Fragen dazu diskutiert werden.

Die Auswahl der Aufgaben sollte nicht als Hinweis irgendeiner Art bezüglich der Klausur betrachtet werden.

Aufgabe 1:

Es sei

$$\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}, \quad A \mapsto A + A^{\mathrm{T}}$$

Hierbei ist A^{T} die transponierte Matrix von $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2} = \mathrm{Mat}(2,\mathbb{Q})$. Zeigen Sie:

(a) φ ist eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung.

(b) $\ker\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a = d = 0 \text{ und } b = -c \right\}$.

(c) $\mathrm{im}\,\varphi = \{A \in \mathbb{Q}^{2\times 2} | A = A^{\mathrm{T}}\}$.

(d) Gelten die Aussagen aus (b) und (c) auch, wenn man $\mathbb{Q}$ durch einen beliebigen Körper $\mathbb{K}$ ersetzt?

Aufgabe 2:

Es seien $b_1 = e_1 + e_3$, $b_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $b_3 = -e_1 + e_2 + e_4$ und $b_4 = e_4 \in \mathbb{R}^4$, wobei $(e_1, \ldots, e_4)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^4$ ist. Weiter sei $\langle x, y\rangle := x_1y_1 + \ldots + x_4y_4$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$. Orthonormalisieren Sie die Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_4)$ bzgl. des Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle$, so dass die neue Basis $u_1 = \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1\rangle}}$ enthält.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie $\mathbb{R}^3$ zusammen mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Es sei

$$\mathrm{SO}(3) := \{A \in \mathrm{O}(3) \mid \det A = 1\}.$$

Folgern Sie aus dem Satz über die Normalform orthogonaler Endomorphismen, dass für jedes Element $A \in \mathrm{SO}(3)$ die Abbildung $x \mapsto Ax$ eine Drehung um eine Gerade durch den Ursprung ist. Wieso ist die Hintereinanderausführung von zwei Drehungen um Geraden durch den Ursprung wieder eine solche Drehung?

Aufgabe 4:
Betrachten Sie die Abbildung $d' : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d'(x, y) := \arctan |x - y|.$$

(a) Zeigen Sie, dass d' eine Metrik ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst für $\alpha, \beta \in [0, \infty)$: $\arctan(\alpha+\beta) \leq \arctan \alpha + \arctan \beta$.

(b) Entscheiden Sie (mit Begründung!), ob die Folgen in $\mathbb{R}$, die bezüglich d' konvergieren, genau die Folgen sind, die bezüglich der Standardmetrik d mit $d(x, y) = |x - y|$ konvergieren.

(c) Gilt (b) noch, wenn man d' durch eine beliebige Metrik auf $\mathbb{R}$ ersetzt?

Aufgabe 5:
Berechnen Sie die Fourier–Reihe der 2π-periodisch fortgesetzten Funktion $f(x) = \begin{cases} 1 : & 0 < x \leq \pi \\ 0 : & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$.

Aufgabe 6:
Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x, y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}.$$