Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik II für Studierende der Physik: Blatt 9 zur Abgabe am 19.6.2019 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (1+1+2 Punkte)
Gegeben seien die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x(1-y), xy)$ und die offene Teilmenge $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ von $\mathbb{R}^2$.

(a) Berechnen Sie df, und begründen Sie, dass die eingeschränkte Abbildung $f|_U\colon U \to \mathbb{R}^2$ eine Immersion und eine Submersion ist.

(b) Ist die Abbildung f injektiv? Ist die eingeschränkte Abbildung $f|_U$ injektiv?

(c) Zeigen Sie, dass f den Streifen $(0,\infty)\times(0,1)$ diffeomorph auf $(0,\infty)\times(0,\infty)$ abbildet.

Aufgabe 2: (1+1 Punkte)
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung so, dass das Differential df_x invertierbar ist für alle $x \in U$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

(a) Das Bild $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen.

(b) Ist f injektiv, so ist $f\colon U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus.

Aufgabe 3: (2 Punkte)
Berechnen Sie für die beiden unten angegebenen Funktionen $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jeweils das Differential dg. Bestimmen Sie jeweils alle Punkte (x,y) im Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$, an denen g lokal ein Diffeomorphismus ist. Geben Sie $(dg^{-1})_{g(x,y)}$ für all diese Punkte (x,y) an.

(a) $g(x,y) = (y^3 - x^3, x^3 + y^3)$.

(b) $g(x,y) = (x - y^2, x^2 + y)$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Sei $K := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| < 1\}$, und sei $F\colon K \to \mathbb{R}^3$, $F(\mathbf{x}) = (1 - \|\mathbf{x}\|^2)^{-1/2}\mathbf{x}$.
Zeigen Sie, dass F bijektiv und stetig differenzierbar ist, berechnen Sie dF und zeigen Sie, dass dF in jedem Punkt invertierbar ist.
Anmerkung: Wir haben uns auf den drei-dimensionalen Fall beschränkt. Diese Aufgabe funktioniert aber für jede endliche Dimension.

Aufgabe 5: (1+1+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^3 + z + xy = 1$ für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $z = \varphi(x, y)$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Hinweis: Wenden Sie den Satz über implizite Funktionen an auf die Funktion $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = z^3 + z + xy - 1$.

(c) Berechnen Sie $d\varphi_{(1,1)}$ und untersuchen Sie die Funktion φ auf Extrema.