Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik II für Studierende der Physik: Blatt 7 zur Abgabe am 29.5.2019 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei f die 2π-periodische Funktion definiert für $x \in [-\pi, \pi)$ durch $f(x) = |x|$. Skizzieren Sie f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$. Bestimmen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten a_k, b_k, für $k \in \mathbb{N}$, und leiten Sie die folgende Formel her:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Aufgabe 2: (1+1 Punkte)
Berechnen Sie mit Hilfe des Vektorprodukts

(a) den Flächeninhalt des durch die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gegebenen Dreiecks im $\mathbb{R}^3$,

(b) das Volumen des durch die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gegebenen Parallelepipeds.

Aufgabe 3: (1+4 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F(x,y) := xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $F(0,0) = 0$.

(a) Zeigen Sie: F ist überall stetig.

(b) Zeigen Sie, dass F überall zweimal partiell differenzierbar ist, und berechnen Sie die zweiten partiellen Ableitungen $\partial_2\big(\partial_1 F\big)$ und $\partial_1\big(\partial_2 F\big)$.
Wie passt das zur Aussage des Lemmas von Schwarz?

Aufgabe 4: (2+1 Punkte)
In der Vorlesung wird die Polarkoordinatenabbildung

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (r,\varphi) \mapsto (x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

definiert.
Betrachten Sie im Folgenden

$$\Phi\colon \mathbb{R}_+ \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (r,\varphi) \mapsto (x,y).$$

(a) Beweisen Sie, dass
$$\Psi(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$
die auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ definierte Umkehrabbildung zu Φ ist.

(b) Berechnen Sie die Jacobimatrizen von Φ und Ψ.

Aufgabe 5: (2 Punkte)
Seien $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$, $v\colon U \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Rechnen Sie (unter Benutzung des Lemmas von Schwarz) nach, dass dann gilt:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} v = 0.$$

Anmerkung: Für $U = \mathbb{R}^3$ gilt: Jedes zweimal stetig partiell differenzierbare Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot} v = 0$ ist der Gradient einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, und analog ist jedes zweimal stetig partiell differenzierbare Vektorfeld $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{div} w = 0$ von der Form $\operatorname{rot} v$ für ein Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. (Für $U \neq \mathbb{R}^3$ gelten aber beide Aussagen im allgemeinen nicht.)

Aufgabe 6: (0 Punkte)
Auf dem Vektorraum V der auf $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbaren komplexwertigen Funktionen haben wir in der Vorlesung das Hermitesche Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

betrachtet. Beweisen Sie:
Ist $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Hilbertbasis von V (zum Beispiel eine der in der Vorlesung betrachteten Hilbertbasen $\{e_k(x) = e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ oder $\{1, \cos(kx), \sin(\ell x)\}_{k,\ell\geq 1}$), und ist $f \in V$ eine stetige Funktion, welche orthogonal zu allen b_k ist, so gilt $f = 0$.