Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik II für Studierende der Physik: Blatt 6 zur Abgabe am 22.5.2019 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (1+2+0 Punkte)

(a) Sei V ein normierter $\mathbb{C}$-Vektorraum, $F\colon V \to V$ linear. Zeigen Sie, dass für die Operatornorm

$$\|F\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|}$$

gilt: Für alle beschränkten linearen Abbildungen $F_1, F_2\colon V \to V$ ist

$$\|F_1 \circ F_2\| \leq \|F_1\| \cdot \|F_2\|.$$

(b) Zeigen Sie, dass der Vektorraum $L_b(V_1, V_2)$ der beschränkten Operatoren zwischen zwei beliebigen normierten $\mathbb{C}$-Vektorräumen wieder ein normierter Vektorraum ist (mit der Operatornorm).

(c) Sei $V_1 = C^\infty[0,1]$ mit der Norm $\|f\|_{C^2} = \sup\limits_{x\in[0,1]} \{|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)|\}$ und $V_2 = C^\infty[0,1]$ mit der Norm $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} \{|f(x)|\}$. Untersuchen Sie die lineare Abbildung $F\colon V_1 \to V_2$, $f \mapsto f''$ auf Stetigkeit.

Aufgabe 2: (1+2+1+1 Punkte)

Betrachten Sie den n-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{C}^n$ versehen mit der vom kanonischen Hermiteschen Skalarprodukt induzierten Norm

$$\|z\|_2 := \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2} \quad \text{für} \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n.$$

(a) Zeigen Sie, dass für die Operatornorm einer Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$,

$$\|D\| = \sup_{\|z\|_2=1} \|Dz\|_2 = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für jede beliebige Matrix $A \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{C})$ und jede beliebige unitäre Matrix $U \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{C})$

$$\|UAU^\dagger\| = \|A\|$$

gilt.

(c) Gelte nun für $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$, dass $A^\dagger = A$. Zeigen Sie, dass die Operatornorm von A gleich dem Betragsmaximun der zugehörigen Eigenwerte ist.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe eines Beispiels, dass es Matrizen $B \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ gibt, deren Operatornorm nicht gleich dem Betragsmaximun aller Eigenwerte ist.

Aufgabe 3: (2 Punkte)
Geben Sie für die folgenden Funktionen $f_i : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 3$ den größtmöglichen Definitionsbereich D und die kleinste von Null verschiedene Periode L an:

$$f_1(x) = 5\cos x, \quad f_2(x) = \sin 6\pi x, \quad f_3(x) = \tan \frac{x}{8}.$$

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)
Sei V der Vektorraum der 2π-periodischen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, so dass $f|_{[0,2\pi]}$ integrierbar ist, und sei $U \subseteq V$ der reelle Untervektorraum der reellwertigen Funktionen aus V. Sei weiter $e_k(x) := \exp(ikx)$ für $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $f \in V$ gilt für das n-te Fourier-Polynom $F_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$:

$$F_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

wobei

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx. \end{aligned}$$

Außerdem gilt: Wenn $f \in U$ ist, dann ist $c_{-k} = \overline{c_k}$ und $F_n(f) \in U$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a):

(i) Ist $f \in U$ eine gerade Funktion, d.h. $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gilt für das n-te Fourier-Polynom:

$$F_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx).$$

(ii) Ist $f \in U$ eine ungerade Funktion, d.h. $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gilt für das n-te Fourier-Polynom:

$$F_n(f) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx).$$

Aufgabe 5: (2+0 Punkte)

Berechnen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k, $k \in \mathbb{Z}$:

(a) für die 2π-periodische Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$g(x) = \sin(ax)$, für $x \in [0, 2\pi)$, wobei $a \notin \mathbb{Z}$;

(b) für die 2π-periodische, stückweise stetige Funktion
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq \pi \\ \pi & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

eindeutig festgelegt ist.