Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik II für Studierende der Physik: Blatt 4 zur Abgabe am 8.5.2019 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (2+2 Punkte)
Für $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Basis $\mathcal{B} = (u, e_1, e_2)$ mit $u = e_1 + 2e_2 + 2e_3$, das kanonische Skalarprodukt $\langle x, y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ und das Skalarprodukt

$$(x, y) := 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2.$$

(Sie müssen weder beweisen, dass $\mathcal{B}$ eine Basis ist, noch, dass $(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert.)

(a) Orthonormalisieren Sie $\mathcal{B}$ bzgl. des Skalarproduktes $\langle\cdot,\cdot\rangle$, so dass die neue Basis $u_1 = \frac{u}{\sqrt{\langle u,u\rangle}}$ enthält.

(b) Orthonormalisieren Sie $\mathcal{B}$ bzgl. des Skalarproduktes $(\cdot,\cdot)$, so dass die neue Basis $u_1 = \frac{u}{\sqrt{(u,u)}}$ enthält.

Aufgabe 2: (3 Punkte)
Sei (V, β) ein Hermitescher Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Menge $U(V)$ der unitären Endomorphismen von V eine Untergruppe der Automorphismen von V bildet.

Aufgabe 3: (2+0 Punkte)
Betrachten Sie den $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\right\}$$

der *quadratsummierbaren komplexen Folgen* und die Abbildung

$$\beta\colon \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}, \quad \beta((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung β ein Hermitesches Skalarprodukt auf $\ell^2(\mathbb{C})$ definiert.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Abbildung β wohldefiniert ist. Nutzen Sie hierzu die Ungleichung $|ab| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$ für $a, b \in \mathbb{C}$ um zu zeigen, dass die durch β definierte Reihe absolut konvergiert.

(b) Formulieren Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für dieses Skalarprodukt als Aussage über Reihen.

Aufgabe 4: (3 Punkte)
Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ zusammen mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sowie die symmetrische Bilinearform β gegeben durch

$$\beta(u, v) := \langle u, \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} v \rangle, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie für β die Normalform im Sinne des Trägheitssatzes von Sylvester, d.h. bestimmen Sie die Zahlen r_+, r_- und r_0 und eine orthogonale Basis bezüglich der die darstellende Matrix diese Normalform hat.

Aufgabe 5: (2+1+1+2+1 Punkte)
Es sei $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|$. Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^3$.
Das *Vektorprodukt* (oder *Kreuzprodukt*) von x und y ist der Vektor

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die durch das Kreuzprodukt definierte Abbildung

$$\times \;:\; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \;\to\; \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \;\mapsto\; x \times y.$$

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) Das Kreuzprodukt ist bilinear und schiefsymmetrisch (d.h. $y \times x = -x \times y$).

(b) $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2$.

(c) $\|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \sin\varphi$, wenn $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $\varphi = \measuredangle(x, y) \in [0, \pi]$. Es ist $x \times y = 0$ genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

(d)
  (i) Sind x und y linear unabhängig, so ist $(x, y, x \times y)$ eine positiv orientierte Basis.
  (ii) Sind x und y orthonormal, so ist $(x, y, x \times y)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis.

(e) Es gilt $x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$, und damit $x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0$.
Anmerkung: Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ, und die Gleichung $x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0$ heißt Jacobi-Identität.