Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik II für Studierende der Physik: Blatt 3 zur Abgabe am 24.4.2019 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (3 Punkte)
Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$?
Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume (über $\mathbb{R}$).

Aufgabe 2: (5 Punkte)
Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$?
Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{C}$?
Bestimmen Sie in beiden Fällen die Eigenwerte und Eigenräume.

Aufgabe 3: (3+2 Punkte)

(a) Sei V der vierdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 und sei $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ die Abbildung definiert durch

$$\beta(p, q) := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx\,.$$

Weisen Sie nach, dass β eine symmetrische Bilinearform ist. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von β bezüglich der Basis $(1, x, x^2, x^3)$.

(b) Betrachten Sie den Vektorraum $V := C([0, 1], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen mit reellen Werten auf dem Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ ein euklidisches Skalarprodukt definiert:

$$\beta(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx, \quad f, g \in V.$$

Aufgabe 4: (1+1+1+0+0+0 Punkte)

Die folgenden Aufgaben enthalten Anwendungen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Die ersten beiden sind relativ einfach, die übrigen sind eher Knobelaufgaben. Diese haben elegante kurze Lösungen, für die aber jeweils eine nicht ganz triviale Idee nötig ist. Wir haben sie trotzdem mit aufgenommen, um die Vielseitigkeit der Anwendungen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung zu demonstrieren.
Beweisen Sie:

(a) (Trick mit den Einsen) Für beliebige reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) (Aufteilungstrick) Für beliebige reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und jedes $0 < p < 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{2p} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{2-2p} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(c) (Mittelwert von Produkten vs. Produkt von Mittelwerten)
Die Zahlen p_k, a_k und b_k seien nicht negativ, und es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \qquad \text{sowie } a_k b_k \geq 1 \quad \text{für alle } k = 1, \ldots, n.$$

Dann gilt auch

$$1 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} p_k b_k \right).$$

(d) (Symmetrien) Für positive Zahlen x, y und z gilt

$$(x + y + z) \leq 2 \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \right).$$

(e) (Dreierpack) Für beliebige reelle Zahlen a_k, b_k und c_k, $k = 1, \ldots, n$ gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

(f) Für positive reelle Zahlen p_k mit $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \left(p_k + \frac{1}{p_k} \right)^2 \geq n^3 + 2n + \frac{1}{n}.$$