Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik II für Studierende der Physik: Blatt 1 zur Abgabe am 10.4.2019 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (3+2 Punkte)

(a) Über dem Körper $\mathbb{R}$ sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & + & 2\,x_4 & & & = & 3 \\ & & & & x_3 & + & 2\,x_4 & - & x_5 & = & 1 \\ & & & - & 2\,x_3 & - & 4\,x_4 & + & 2\,x_5 & = & -2 \end{array}$$

gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Menge L aller Lösungen dieses Gleichungssystems.

(b) Berechnen Sie die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ und sei $L(V,W)$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen von V nach W.
Seien $U \subseteq V$ und $U' \subseteq W$ fest gewählte Untervektorräume. Zeigen Sie, dass

$$A = \{f\colon V \to W \mid U \subseteq \ker(f)\} \text{ und}$$

$$B = \{f\colon V \to W \mid \operatorname{im}(f) \subseteq U'\}$$

Untervektorräume von $L(V,W)$ sind.

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Berechnen Sie geschickt die Determinanten der folgenden Matrizen in $\operatorname{Mat}(5,\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: (1+2+2 Punkte)

(a) Sei $A = (a_{i\,j})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$ eine quadratische Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$.
Zeigen Sie, dass durch

$$\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}(n,\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ A \mapsto \mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k\,k}$$

eine lineare Abbildung definiert ist.

Anmerkung: Diese Abbildung heißt *Spur* (englisch *<u>tr</u>ace*). Es gilt $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}})$.

(b) Seien $A = (a_{i\,j})_{i\in\{1,\ldots,n\},j\in\{1,\ldots,m\}}$ und $B = (b_{i\,j})_{i\in\{1,\ldots,m\},j\in\{1,\ldots,n\}}$ nicht notwendigerweise quadratische Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

(c) Welche der folgenden Identitäten sind für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Matrizen $A, B, C \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ richtig?

(i) $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA)$,

(ii) $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BAC)$

Beweisen Sie Ihre Behauptungen, wenn die Identität richtig ist, andernfalls widerlegen Sie sie bitte durch ein Gegenbeispiel.