Universität Hamburg Sommer 2017
Janko Latschev

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 9

Präsenzaufgaben

(P17) Ziel dieser Aufgabe ist es zu beweisen, dass die Schnittkrümmungen einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) den Krümmungstensor R eindeutig bestimmen. Zeigen Sie dazu für $x, y, z, t \in T_pM$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\big(R(x+\alpha t, y+\beta z, y+\beta z, x+\alpha t) - R(x+\alpha z, y+\beta t, y+\beta t, x+\alpha z)\big)|_{\alpha,\beta=0} = 6R(x, y, z, t),$$

wobei wir $R(a, b, c, d) := g(R(a, b)c, d)$ gesetzt haben.
Hinweis: Verwenden Sie die Symmetrien des Krümmungstensors und die Bianchi-Identität, um die "störenden" Terme umzuschreiben!
Folgt die Aussage mit diesem Beweis auch für pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten?

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 29.6., in der Vorlesung

(A26) Diese Aufgabe beschäftigt sich mit verschiedenen Modellen des hyperbolischen Raumes H^n in beliebigen Dimensionen. Wir schreiben $\mathbb{R}^{1,n}$ für den Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der (konstanten) pseudo-Euklidischen Metrik

$$g(v,w) = -v_1 w_1 + \sum_{i=2}^{n+1} v_i w_i,$$

wobei wir später stets $n \geq 1$ voraussetzen. Wir definieren die Untermannigfaltigkeit

$$H^n := \{x \in \mathbb{R}^{1,n} \mid g(x,x) = -1, x_1 > 0\} \subset \mathbb{R}^{1,n}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Einschränkung von g auf H^n positiv definit ist!

b) Zeigen Sie, dass H^n konstante Schnittkrümmung hat, indem Sie den Beweis für S^n aus der Vorlesung geeignet anpassen!

c) Sei $s := (-1, 0, \ldots, 0)$ und sei $K := \{s + y \in \mathbb{R}^{1,n} \mid g(y,y) = 0\}$ der um s verschobene Nullkegel der Metrik g. Zeigen Sie, dass die Inversion $I_1 : \mathbb{R}^{1,n} \setminus K \to \mathbb{R}^{1,n} \setminus K$,

$$I_1(x) := s - \frac{2(x-s)}{g(x-s, x-s)}.$$

eine Involution ist, d.h. dass $I_1 \circ I_1 = \mathrm{id}$ gilt!

d) Zeigen Sie, dass I_1 die Untermannigfaltigkeit H^n diffeomorph auf den offenen Ball $B^n(0,1) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{1,n}$ abbildet, und dass die zurückgezogene Metrik auf diesem Ball die Form

$$h_1 := I_1^* g = \frac{4}{(1 - \|x\|_{\mathrm{st}}^2)^2} g_{\mathrm{st}}$$

hat, wobei g_{st} die Riemannsche Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnet!

e) Sei nun $t = (0, \ldots, 0, -1) \in \mathbb{R}^n$ und $I_2 : \mathbb{R}^n \setminus \{t\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{t\}$ die Inversion

$$I_2(z) = t + \frac{2(z-t)}{g_{\mathrm{st}}(z-t, z-t)}.$$

Dies ist ebenfalls eine Involution. Zeigen Sie, dass I_2 den offenen Ball $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ diffeomorph auf die obere Halbebene $\mathbb{H}^n := \{z \in \mathbb{R}^n \mid z_n > 0\}$ abbildet, und dass auf $\mathbb{H}^n$ die zurückgezogene Metrik $I_2^* h_1$ die Form

$$h_2 := I_2^* h_1 = \frac{1}{z_n^2} g_{\mathrm{st}}$$

hat! Für $n = 2$ erhalten wir die Metrik h auf $\mathbb{H} = \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^2$ aus Aufgabe **(A23)** vom Blatt 7.

f) Beweisen Sie, dass H^n vollständig ist!

Siehe nächstes Blatt!

(A27) *Mit etwas Glück ist diese Aufgabe eine Wiederholung mit leichten Modifikationen von Themen, die aus der Höheren Analysis bzw. der Mathematik für Pphysiker bekannt sind.*
Eine *Volumenform* auf einer n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist eine Differentialform $\mu \in \Omega^n(M)$ welche nirgends verschwindet. Zeigen Sie:

a) Eine Mannigfaltigkeit besitzt genau dann eine Volumenform, wenn sie orientierbar ist, d.h. wenn es einen Altas gibt, dessen Kartenübergänge positive Determinante haben.

b) Ist M orientierbar, und ist g eine Riemannsche Metrik auf M, so wird durch die Bedingung

$$\mu_p(e_1, \dots, e_n) = 1 \quad \text{für alle positiv orientierten Orthonormalbasen } e_1, \dots, e_n \text{ von } T_pM$$

eine eindeutige zu g assoziierte Volumenform μ definiert.

c) Hat die Metrik g in lokalen positiv orientierten Koordinaten $(x_1, \dots, x_n)$ auf $U \subset M$ die Koeffizientenfunktionen g_{ij}, so hat die Volumenform lokal die Form

$$\mu|_U = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

d) Wir orientieren nun $M = S^2$ als Rand von B^3 und betrachten die von der Standardmetrik des $\mathbb{R}^3$ induzierte Metrik g auf S^2. Zeigen Sie, dass die dazu assoziierte Volumenform μ durch

$$\mu_x(v, w) = \langle x, (v \times w)\rangle$$

gegeben ist, wobei $\times$ das Kreuzprodukt und $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, und wir die Tangentialräume T_xS^2 mit den linearen Unterräumen $(\mathbb{R}x)^\perp$ des $\mathbb{R}^3$ identifizieren.

e) Bezüglich dieser Volumenform hat S^2 die Fläche 4π.

(A28) Seien nun $A, B, C \in S^2$ drei Punkte, welche nicht alle auf demselben Großkreis liegen, und seien $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 2\pi)$ die Innenwinkel eines zugehörigen Dreiecks Δ, welches aus minimalen Geodätischen besteht (falls unter den Punkten keine Antipoden sind, ist dieses eindeutig bestimmt). Beweisen Sie, dass die Fläche $F(\Delta)$ dieses Dreiecks sich als

$$F(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

berechnen lässt!
Der folgende Beweis war bereits Euler bekannt: Vervollständigen Sie die Seiten des Dreiecks zu Großkreisen. Die zu einem Seitenpaar gehörenden Großkreise zerlegen die Sphäre in jeweils 4 Gebiete, von denen je genau eines das Dreieck Δ und eines das gegenüberliegende Dreieck $-\Delta$ enthält. Was ist der Flächeninhalt der so ausgezeichneten beiden Gebiete? Die Vereinigung der 6 auf diese Weise den drei Seitenpaaren zugeordneten Gebiete überdeckt die gesamte Sphäre, wobei genau Δ und $-\Delta$ mehrfach überdeckt werden.