Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2017

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 7

Präsenzaufgaben

(P16) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit, $\iota : M \to \mathbb{R}^k$ die Einbettung, $g = \iota^* g_{\mathrm{st}}$ die von der Standardmetrik auf $\mathbb{R}^k$ induzierte Riemannsche Metrik auf M und ∇ deren Levi-Civita-Zusammenhang. Zeigen Sie:

a) Es gilt

$$(\nabla_X Y)_p = \left(\nabla^{\mathbb{R}^k}_{X_p}(\iota_* Y)\right)^\top,$$

wobei $Z^\top$ für $Z \in \Gamma_\iota(T\mathbb{R}^k)$ wie in Aufgabe **(P15)** die tangentiale Komponente von Z entlang ι bezeichnet, d.h. $Z_p^\top = \pi_p(Z)$, wobei $\pi_p : T_p\mathbb{R}^k \to T_pM$ die orthogonale Projektion ist.

Mit anderen Worten: *Der Levi-Civita-Zusammenhang der induzierten Metrik ist der vom Standardzusammenhang auf $\mathbb{R}^k$ induzierte Zusammenhang auf M.*

In der letzten Präsenzübung haben wir diskutiert, dass eine Kurve $\gamma : (a, b) \to M \subset \mathbb{R}^k$ genau dann eine Geodätische bezüglich ∇ ist, wenn $\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}M$ für alle $t \in (a, b)$.

b) Wir betrachten nun den Spezialfall $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Geodätische γ_v durch den Punkt $p \in S^n$ mit dem Startvektor $\dot{\gamma}_v(0) = v \in T_pS^n$ durch die Formel

$$\gamma_v(t) = \cos(|v|t)p + \sin(|v|t)\frac{v}{|v|}$$

gegeben ist, wobei $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die Norm von v bezeichnet.

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 15.5., in der Vorlesung

(A21) Sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ ein Zusammenhang auf TM. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

a) ∇ ist ein metrischer Zusammenhang.

b) g ist parallel bezüglich ∇, d.h. $\nabla g = 0$.

c) Für alle Kurven $\gamma : [a, b] \to M$ und Vektorfelder $X, Y \in \Gamma_\gamma(TM)$ gilt

$$\frac{d}{dt} g(X, Y) = g(\nabla_{\frac{d}{dt}} X, Y) + g(X, \nabla_{\frac{d}{dt}} Y).$$

d) Paralleltransporte entlang Kurven $\gamma : [a, b] \to M$ bezüglich ∇ sind Isometrien für g, d.h. es gilt stets

$$g_{\gamma(b)}(P_\gamma(v), P_\gamma(w)) = g_{\gamma(a)}(v, w).$$

(A22) In der Vorlesung haben wir die *Koszul-Formel* für den Levi-Civita-Zusammenhang einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) gesehen:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Y g(Z, X) - Zg(X, Y) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]).$$

a) Leiten Sie daraus die folgende Berechnungsformel für die Christoffel-Symbole des Zusammenhangs in lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ auf $U \subset M$ her:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{n} g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell} \right).$$

b) Berechnen Sie die lokalen Koeffizienten der Standardmetrik auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und die Christoffel-Symbole ihres Levi-Civita-Zusammenhangs in den Koordinaten (φ, ϑ), welche durch die Karte $\psi : S^2 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\} \to (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit

$$\psi^{-1}(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Wie passt das Ergebnis zu **(P16) b)** ?
Hinweis: Wenn Sie Symmetrien nutzen, können Sie den Rechenaufwand verkleinern.

(A23) Sei $\mathbb{H} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ die obere Halbebene, welche wir mit der Riemannschen Metrik h versehen, die in den Standardkordinaten durch folgende Matrix gegeben sei:

$$(h_{ij}(x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole des Levi-Civita-Zusammenhangs dieser Metrik!

b) Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ die Kurve $c(t) = (t, 1)$. Bestimmen Sie das entlang c parallele Vektorfeld $Y \in \Gamma_c(T\mathbb{H})$, das in $t = 0$ den Wert $Y_0 = \partial_{x_2}|_{(0,1)} \in T_{(0,1)}\mathbb{H}$ hat!