Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2017

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 5

Präsenzaufgaben

(P11) Wir betrachten die Untergruppe $H \subseteq \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale, d.h.

$$H = \left\{ D = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Einträge $a, b, c \in \mathbb{R}$ oberhalb der Diagonale geben Koordinaten auf H, welche H mit $\mathbb{R}^3$ identifizieren.
Beschreiben Sie die linksinvarianten Vektorfelder X, Y und Z mit $X_e = \partial_a$, $Y_e = \partial_b$ und $Z_e = \partial_c$ in diesen Koordinaten, sowie deren Lieklammern. Fällt Ihnen etwas auf?

(P12) Zeigen Sie, dass jede Liegruppe triviales Tangentialbündel hat, d.h. es existiert ein Isomorphismus von Vektorbündeln $TG \cong \underline{\mathbb{R}}^{\dim G} := G \times \mathbb{R}^{\dim G}$ über G!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 18.5., in der Vorlesung

(A15) Sei G eine Liegruppe und $\gamma : \mathbb{R} \to G$ ein Homomorphismus von Liegruppen, d.h. eine glatte Kurve in G mit $\gamma(0) = e$ und $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$. Zeigen Sie, dass γ die Form $\gamma(t) = \exp(t\xi)$ mit $\xi = \dot{\gamma}(0)$ hat!

(A16) **a)** Beschreiben Sie die Liealgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ der Liegruppe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ als Unterraum von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$!

b) Beweisen Sie, dass die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ nicht surjektiv ist! *Hinweis: Ist eine Matrix A im Bild der Exponentialabbildung, so besitzt sie eine Wurzel, d.h. es existiert eine Matrix B mit $B^2 = A$.*

c) Ist sie injektiv?

(A17) Analog zur Lieableitung von Vektorfeldern kann man auch die Lieableitung für Differentialformen definieren: Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \Gamma(TM)$ ein glattes Vektorfeld und $\omega \in \Omega^k(M)$ eine glatte k-Form, so definieren wir

$$L_X\omega := \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^*\omega - \omega}{t},$$

wobei φ_t der Fluss des Vektorfelds X ist. Beweisen Sie die *Cartan-Formel*

$$L_X\omega = d(i_X\omega) + i_X d\omega,$$

wobei $i_X : \Omega^*(M) \to \Omega^{*-1}(M)$ das Einsetzen des Vektorfeldes in die Differentialform bezeichnet, indem Sie sich folgende Schritte überlegen. Für die Beschreibung bezeichnen wir mit $L_X^*\omega$ die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung.

a) Sowohl L_X als auch L_X^* sind Derivationen des $\wedge$-Produktes von Differentialformen, d.h. es gilt[1]

$$L_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = (L_X\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (L_X\omega_2)$$

und analog für L_X^*.

b) Sowohl L_X als auch L_X^* kommutieren mit der äußeren Ableitung $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$.

c) L_X und L_X^* stimmen auf Funktionen $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ überein.

d) Aus diesen drei Aussagen folgt die Behauptung.

(A18) Beweisen Sie für 1-Formen $\eta \in \Omega^1(M)$ die Beziehung

$$d\eta(X,Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X,Y]).$$

Hinweis: Eine funktionierende Beweisstrategie ist, zunächst

$$(L_X\eta)(Y) = X(\eta(Y)) - \eta(L_XY)$$

zu beweisen und dann die Cartan-Formel anzuwenden. Es gibt jedoch auch andere.

---

[1] Das Einsetzen $i_X : \Omega^*(M) \to \Omega^{*-1}(M)$ erfüllt für $\omega_1 \in \Omega^k(M)$ und $\omega_2 \in \Omega^\ell(M)$ die Relation $i_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = (i_X\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k\omega_1 \wedge (i_X\omega_2)$.