

DIFFERENTIALGEOMETRIE

Übungsaufgaben 4

Präsenzaufgaben

(P9) Es sei M eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und (φ, U) eine Karte mit den lokalen Koordinaten $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

b) Für $X, Y \in \Gamma(TM)$ und $f, g \in C^\infty(M)$ gilt allgemein

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

c) Für glatte lokale Vektorfelder $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ auf U gilt die Formel

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

d) Berechnen Sie die Lieklammer der Vektorfelder

$$X := x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{und} \quad Y := -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

auf $\mathbb{R}^2$. Können Sie die Antwort auch ohne Rechnung erklären?

(P10) Finden Sie den Definitionsbereich $\mathcal{D}_X \subset M \times \mathbb{R}$ des Flusses des Vektorfeldes $X_x = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ auf $M = \mathbb{R}$!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 4.5., in der Vorlesung

- (A11) Sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie: Gilt für Vektorfelder $X_i \in \Gamma(TM)$ und $\overline{X}_i \in \Gamma(TN)$ ($i \in \{1, 2\}$) in jedem Punkt $p \in M$ die Beziehung

$$(\overline{X}_i)_{F(p)} = F_* X_p,$$

so folgt auch

$$[\overline{X}_1, \overline{X}_2]_{F(p)} = F_* [X_1, X_2]_p \quad \text{für alle } p \in M.$$

- (A12) Seien X und Y Vektorfelder auf M , und seien φ_t bzw. ψ_t die jeweiligen (lokalen) Flüsse. Für $p \in M$ gibt es ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$, so dass durch $c_p(t) := \psi_{-t} \circ \varphi_{-t} \circ \psi_t \circ \varphi_t(p)$ eine Kurve $c_p : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert wird. Zeigen Sie $\dot{c}_p(0) = 0$ und

$$\frac{1}{2} \ddot{c}_p(0) = [X, Y]_p.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Abbildung $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, gegeben als $\beta(s, t) = \psi_{-s} \circ \varphi_{-t} \circ \psi_s \circ \varphi_t(p)$, und drücken Sie die Ableitungen von c durch geeignete Ableitungen von β aus!

- (A13) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, und sei E ein Vektorbündel vom Rang k über M .

- a) Beschreiben Sie die Konstruktion des Bündels $\pi : \Lambda^k E^* \rightarrow M$ mit $\pi^{-1}(p) = \Lambda^k(E_p^*)$, der Raum der alternierenden k -Formen auf E_p , indem Sie aus den Übergangsfunktionen $\varphi_{\alpha\beta}$ von E die Übergangsfunktionen $\psi_{\alpha\beta}$ für $\Lambda^k E^*$ gewinnen.
- b) Beweisen Sie, dass E genau dann orientierbar ist, wenn das Bündel $\Lambda^k E^*$ trivial ist. Kommt Ihnen diese Aussage bekannt vor?

- (A14) Finden Sie vollständige Vektorfelder X und Y auf $\mathbb{R}^2$, so dass $X + Y$ nicht vollständig ist!