Universität Hamburg
Janko Latschev Sommer 2017

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 2

Präsenzaufgaben

(P3) Sei $\mathcal{A}_1$ die übliche glatte Struktur auf $\mathbb{R}$, d.h. die Äquivalenzklasse des Atlasses $\{(\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathbb{R})\}$, und sei $\mathcal{A}_2$ die glatte Struktur, welche durch den Atlas $\{(\varphi(x) = x^3, \mathbb{R})\}$ induziert wird.

a) Zeigen Sie, dass diese beiden glatten Strukturen auf $\mathbb{R}$ verschieden sind!

b) Sind diese beiden glatten Strukturen auf $\mathbb{R}$ diffeomorph?

(P4) Aus der Analysis ist bekannt, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben als $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ glatt ist. Benutzen Sie diese Tatsache, um zu gegebenem $r > 0$ eine glatte Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften zu konstruieren:

- $h(\mathbb{R}^n) = [0, 1]$.
- Der *Träger* $\operatorname{supp} h := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \neq 0\}}$ ist im Ball $B(0, r)$ enthalten.
- $B(0, \frac{r}{2}) \subseteq h^{-1}(1)$.

(P5) Finden Sie eine glatte Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, deren Bild der Torus

$$T_{1,r} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 = r^2\} \quad , 0 < r < 1$$

ist, und deren Ableitung überall vollen Rang hat.

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 20.4., in der Vorlesung

(A4) Wir betrachten die Abbildung $V : S^2 \to \mathbb{R}^6$, welche durch

$$V(x, y, z) := (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz)$$

gegeben ist. Zeigen Sie:

a) Zwei Punkte $p, q \in S^2$ haben genau dann dasselbe Bild unter V, wenn $p = \pm q$.

b) Das Bild $M := V(S^2)$ ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^6$.

c) Es gibt eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$, so dass $L|_M : M \to \mathbb{R}^4$ injektiv ist.

Bemerkung: $\mathbb{R}P^3$ *ist nicht als Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^3$ *realisierbar.*

(A5) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Karte für M und $K \subset U$ eine kompakte Teilmenge. Zeigen Sie, dass es dann eine glatte Funktion $\chi : M \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- $\chi(M) = [0, 1]$.
- $\operatorname{supp} \chi$ ist eine kompakte Teilmenge von U.
- $K \subset \chi^{-1}(1)$.

Folgern Sie, dass es zu jeder glatten Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion $F : M \to \mathbb{R}$ mit $F|_K = f|_K$ gibt.

(A6) Eine topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, falls er sich nicht in zwei offene, nichtleere und disjunkte Teilmengen zerlegen lässt, d.h. sind U und V offene, nichtleere Teilmengen von X und gilt $X = U \cup V$, so folgt $U \cap V \neq \varnothing$. Er heißt *wegzusammenhängend*, falls zu je zwei Punkte $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $c : [0, 1] \to X$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$ existiert.

a) Zeigen Sie, dass das Bild eines zusammenhängenden topologischen Raumes unter einer stetigen Abbildung wieder zusammenhängend ist!

b) Zeigen Sie, dass eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit wegzusammenhängend ist!

c) Zeigen Sie, dass es in einer zusammenhängenden glatten Mannigfaltigkeit sogar zu je zwei Punkten $x, y \in M$ ein $\epsilon > 0$ und eine *injektive* glatte Abbildung $c : (-\epsilon, 1 + \epsilon) \to M$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$ gibt!