Universität Hamburg
Janko Latschev Sommer 2017

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 11

Präsenzaufgaben

(P19) Beweisen Sie, dass für die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \to G$ einer Liegruppe G (welche bekanntlich über Integralkurven linksinvarianter Vektorfelder definiert ist), für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und alle $\xi \in \mathfrak{g}$ die Gleichung

$$\exp((t+s)\xi) = \exp(t\xi) \cdot \exp(s\xi)$$

gilt, wobei rechts die Gruppenmultiplikation verwendet wird. Für jedes $\xi \in \mathfrak{g}$ ist die Abbildung $t \mapsto \exp(t\xi)$ also ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach G. Insbesondere sind die Bilder jeweils Untergruppen.

(P20) In dieser Aufgabe wollen wir die in der Vorlesung begonnene Berechnung der Schnittkrümmung von H^n mit Hilfe von Jacobifeldern zu Ende führen. Dazu betrachten wir wieder

$$H^n := \{x \in \mathbb{R}^{1,n} \mid g(x,x) = -1, x_1 > 0\} \subset \mathbb{R}^{1,n},$$

wobei $g(v,w) = -v_1w_1 + \sum_{i=2}^{n+1} v_iw_i$ die Standardmetrik der Signatur $(1,n)$ ist. Wir hatten bereits gesehen, dass die Geodätische $\gamma : \mathbb{R} \to H^n$ mit $\gamma(0) = e_1$ und $\dot\gamma(0) = e_2$ die Form

$$\gamma(t) = \cosh t \cdot e_1 + \sinh t \cdot e_2$$

hat. Wir definieren die Familie $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R} \to H^n$ von Geodätischen $\gamma_s = \Gamma(s, .)$ durch

$$\Gamma(s,t) := \exp_{e_1}(t(\cos s \cdot e_2 + \sin s \cdot e_3)),$$

so dass $\gamma_s(0) = \gamma(0) = e_1$ und

$$\dot\gamma_s(0) = \cos s \cdot e_2 + \sin s \cdot e_3$$

gilt.

a) Geben Sie eine explizite Formel für $\Gamma(s,t)$ an! *Hinweis: Es gilt* $\gamma_0 = \gamma$.

b) Bestimmen Sie das Jacobifeld $J = \frac{\partial\Gamma}{\partial s}|_{s=0}$ entlang $\gamma_0 = \gamma$.

c) Nutzen Sie die Jacobigleichung, um für $t > 0$ die Schnittkrümmung der durch $J(t)$ und $\dot\gamma(t)$ aufgespannten Ebenen $\sigma_t \subseteq T_{\gamma(t)}H^n$ zu bestimmen.

Da wir bereits wissen, dass die Schnittkrümmung von H^n konstant ist, sollte diese Krümmung nicht von t abhängen...

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Besprechung am Do, 13.7., in der Übung

(A31) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $\gamma : [a, b] \to M$ eine Geodätische, so dass $q = \gamma(b)$ nicht entlang γ konjugiert ist zu $p = \gamma(a)$. Zeigen Sie, dass es dann zu jedem $v \in T_pM$ und $w \in T_qM$ ein eindeutiges Jacobifeld J entlang γ mit $J(a) = v$ und $J(b) = w$ gibt!

(A32) Seien (M_1, g_1) und (M_2, g_2) pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten, und sei $M = M_1 \times M_2$ das Produkt mit der Produktmetrik g. Wir bezeichnen mit $\pi_i : M \to M_i$ die Projektionen. Beweisen Sie:

a) Für jedes Vektorfeld $X \in \Gamma(TM_1)$ gibt es einen kanonischen *Lift* nach M, d.h. ein Vektorfeld $\widetilde{X} \in \Gamma(TM)$ mit

$$(\pi_1)_{*,(p,q)}(\widetilde{X}_{(p,q)}) = X_p, \quad (\pi_2)_{*,(p,q)}(\widetilde{X}_{(p,q)}) = 0$$

für alle $(p, q) \in M_1 \times M_2$. Analog kann man auch Vektorfelder $U \in \Gamma(TM_2)$ liften.

b) Ist jedes Vektorfeld $Z \in \Gamma(TM)$ mit $(\pi_2)_*(Z) \equiv 0$ von der Form $Z = \widetilde{X}$ für ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TM_1)$?

c) Für alle $X, Y \in \Gamma(TM_1)$ und $U, V \in \Gamma(TM_2)$ gilt

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}, \quad [\widetilde{U}, \widetilde{V}] = \widetilde{[U, V]}, \quad \text{und } [\widetilde{X}, \widetilde{U}] = 0.$$

d) Sind $X, Y \in \Gamma(TM_1)$ und $U, V \in \Gamma(TM_2)$ und $Z = \widetilde{X} + \widetilde{U}$ und $Z' = \widetilde{Y} + \widetilde{V}$ die induzierten Vektorfelder auf M, so gilt

$$\nabla^g_Z Z' = \nabla^{g_1}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} + \nabla^{g_2}_{\widetilde{U}} \widetilde{V}.$$

e) Sind $v \in T_pM_1$ und $w \in T_qM_2$ nichtverschwindende Vektoren und ist $\sigma \subset T_{(p,q)}M$ die von $\widetilde{v}$ und $\widetilde{w}$ aufgespannte Ebene, so verschwindet die Schnittkrümmung $K(\sigma)$.

(A33) Sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Zeigen Sie:

a) Es gibt ein eindeutiges Vektorfeld $\operatorname{grad} f \in \Gamma(TM)$, so dass

$$g_x(\operatorname{grad}_x f, v) = df_x(v)$$

für alle $x \in M$ und alle $v \in T_xM$ gilt. Dieses Vektorfeld nennt man *Gradient* von f. Es wird manchmal auch mit ∇f bezeichnet.

b) Der Gradient $\operatorname{grad} f$ steht in jedem Punkt $x \in M$ senkrecht auf der Niveaumenge $f^{-1}(f(x))$ von f durch x.

c) Gilt $|\operatorname{grad} f| \equiv 1$, so sind die Integralkurven von $\operatorname{grad} f$ Geodätische des Levi-Civita-Zusammenhangs.

Finden Sie Beispiele für (pseudo)-Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M, g) und Funktionen f, die zumindest auf einer offenen Teilmenge $U \subset M$ glatt sind und die Bedingung $|\operatorname{grad} f| \equiv 1$ erfüllen.
Sei nun stattdessen $\omega \in \Omega^2(M)$ eine nichtausgeartete 2-Form, d.h. die Bilinearform

$$\omega_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$$

sei in jedem Punkt $x \in M$ nicht ausgeartet (und antisymmetrisch).

Siehe nächstes Blatt!

d) Zu jeder glatten Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ gibt es ein eindeutiges Vektorfeld $X_f \in \Gamma(TM)$ mit

$$\omega_x((X_f)_x, v) = -df(v) \quad \text{für alle } v \in T_xM \text{ und alle } x \in M.$$

Das Minuszeichen ist hier eine (nicht ganz universelle) Konvention.

e) Das Vektorfeld X_f ist überall tangential an die Niveaumengen von f.

Bemerkung: Ist ω zusätzlich noch geschlossen, d.h. gilt $d\omega = 0$, so nennt man eine solche nicht ausgeartete 2-Form symplektische Form *auf M. In diesem Fall ist X_f das zu f assoziierte* Hamiltonsche Vektorfeld. *Für $M = \mathbb{R}^{2n} \cong T^*\mathbb{R}^n$ mit den Koordinaten $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ und der symplektischen Form $\omega_{\mathrm{st}} := \sum_j dp_j \wedge dq_j$ entspricht der Fluss von X_f gerade den Bewegungen des Hamiltonschen Systems mit Konfigurationsraum $\mathbb{R}^n$, Phasenraum $T^*\mathbb{R}^n$ und Energie $f : T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*