Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2013

Funktionentheorie

Erste Klausur

Es sind insgesamt 28 Punkte erreichbar.
Mindestens 12 Punkte werden zum Bestehen der Klausur benötigt.

1. *(3 Punkte)* Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Geben Sie drei verschiedene Bedingungen an, die äquivalent zur Aussage "die Funktion $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ ist holomorph" sind!

2. *(1+2 Punkte)* Bestimmen Sie den Wert der folgenden Kurvenintegrale:

a) $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin(z^3) + z\,\cos(e^z)}{z^2 - 5i + 5}\,dz$, und

b) $\displaystyle\int_\gamma z^7\,dz$, wobei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ durch $\gamma(t) = \sin(\pi t) + \mathbf{i}t$ gegeben ist.

Der Lösungsweg muss klar erkennbar sein.

3. *(3 Punkte)* Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt eine Möbiustransformation, welche die Punkte 1, 2, 3 und ∞ in dieser Reihenfolge auf die Punkte 1, 2, 4 und ∞ abbildet.

4. *(3 Punkte)* Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt eine holomorphe Funktion $f : B(0,2) \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$.

5. *(2+2 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Singularitäten von $g(z) = \frac{z^2}{e^z+1}$ sowie deren Typ (einschließlich der Ordnung bei Polstellen), und berechnen Sie die Residuen von g in diesen Punkten!

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\partial B(0,4)} g(z)\,dz$!

Bitte wenden!

6. *(2+2 Punkte)* Entscheiden Sie, ob auf den folgenden offenen Mengen nichtkonstante beschränkte holomorphe Funktionen $f : \Omega_j \to \mathbb{C}$ existieren:

a) $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

b) $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

7. *(4 Punkte)* Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2}\, dx\,!$$

8. *(4 Punkte)* Sei f eine auf einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ holomorphe Funktion, welche auf $\partial\mathbb{D}$ keine nichtnegativen reellen Werte annimmt. Beweisen Sie, dass f in $\mathbb{D}$ keine Nullstellen besitzt!