

## FUNKTIONENTHEORIE

### Übungsblatt 9

*Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung*

**(P29)** Benutzen Sie die Partialbruchentwicklung

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

aus der Vorlesung, um die Identität

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

zu beweisen.

**(P30)** Beweisen Sie mit Hilfe des Residuensatzes: Ist  $f : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$  injektiv und holomorph und ist  $0 < \varrho < r$ , so ist die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(B(z_0, \varrho)) \rightarrow B(z_0, \varrho)$  durch die Formel

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \varrho)} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz$$

gegeben.

**(P31)** Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen an allen ihren Singularitäten:

a)  $\frac{1 - \cos(z)}{z^3}$       b)  $\frac{1}{(z^2 + 1)^3}$       c)  $\frac{1}{e^z + 1}$       d)  $\frac{1}{\sin(\pi z)}$

*Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 21.6. in der Vorlesung.*

(H36) Sei  $f$  eine rationale Funktion der Form  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  mit  $\deg P \leq \deg Q - 2$ . Zeigen Sie, dass die Summe aller Residuen von  $f$  verschwindet!

(H37) Die Funktion  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph und für  $z_0 \in U$  gelte  $\varphi'(z_0) \neq 0$ . Die Funktion  $g$  habe in  $w_0 = \varphi(z_0)$  einen Pol erster Ordnung. Beschreiben Sie die Beziehung zwischen  $\text{Res}(g \circ \varphi, z_0)$  und  $\text{Res}(g, w_0)$ !

(H38) Beweisen Sie folgende Aussage: Sind  $f$  und  $g$  zwei ganze Funktionen ohne gemeinsame Nullstellen, dann existieren ganze Funktionen  $u$  und  $v$ , so dass

$$uf + vg = 1.$$

*Hinweis: Der Satz von Mittag-Leffler garantiert die Existenz einer meromorphen Funktion  $h$ , deren Polmenge genau die Nullstellenmenge von  $g$  ist, und so dass die Hauptteile von  $h$  in diesen Polstellen gerade mit den Hauptteilen der Funktion  $\frac{1}{fg}$  in diesen Punkten übereinstimmen.*

(H39) Berechnen Sie folgende Integrale:

a)  $\int_{\partial B(0,1)} \frac{e^{iz}}{z^3} dz,$

b)  $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx,$

c)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin^2(x)},$

d)  $\int_0^\infty \frac{x}{x^4 + 1} dx.$