Universität Hamburg
Janko Latschev
Immanuel Stampfli

Sommer 2016

Funktionentheorie

Übungsblatt 8

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P25) Sei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ die Laurentreihe von $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ in $K(0;0,\epsilon)$ für $\epsilon > 0$ genügend klein. Konvergiert diese Reihe in $z = 3 + 4\mathbf{i}$?
Hinweis: Sie sollen die Reihe nicht *explizit bestimmen!*

(P26) Bestimmen Sie die Laurentreihe von

$$g(z) = \frac{1}{z(z-\mathbf{i})^2}$$

auf den Kreisringen $K(0;0,1)$, $K(\mathbf{i};0,1)$ und $K(\mathbf{i};1,\infty)$!

(P27) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und seien A und B diskrete Teilmengen von U. Zeigen Sie, dass dann auch $A \cap B$ und $A \cup B$ diskrete Teilmengen von U sind!

(P28) Beweisen Sie: Ist $f = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion mit $\deg P < \deg Q$, so ist f Summe seiner Hauptteile (d.h. der holomorphe "Restterm" verschwindet).

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 14.6. in der Vorlesung.

(H31) **a)** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol der Ordnung k in z_0. Außerdem sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\varphi : G \to U$ holomorph und nicht konstant mit $\varphi(w_0) = z_0$. Welchen Typ hat die Singularität w_0 von $f \circ \varphi$?

b) Gibt es eine meromorphe Funktion auf $G = \mathbb{C}^*$, welche in den Punkten $z_n = \frac{1}{n} \in U$ jeweils Pole der Ordnung n besitzt?

(H32) Beweisen Sie *sorgfältig*: Sind f und g auf dem Kreisring $K(z_0; r, R)$ holomorph mit Laurententwicklungen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{und} \qquad g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

so hat die Funktion $h := f \cdot g$ die Laurententwicklung

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad \text{mit} \qquad c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}.$$

(H33) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$.

a) Beweisen Sie die Laurententwicklung

$$\exp\left(\frac{\lambda}{2}(z + z^{-1})\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n + z^{-n})$$

auf $K(0; 0, \infty)$, wobei für alle $n \geq 0$ die Koeffizienten durch

$$a_n = a_n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\lambda \cos(t)} \cos(nt)\, dt$$

gegeben sind!

b) Geben Sie alternativ auch Reihendarstellungen für die a_n an! Wie vereinfachen sich diese für $\lambda = 2$?

(H34) Finden Sie die Partialbruchzerlegung von

$$g(z) = \frac{z^6 - 2z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 9z - 4}{(z-1)^2(z+2)}.$$

(H35) Zeigen Sie, dass eine injektive ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Form $f(z) = az + b$ für Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ hat.
Hinweis: Welchen Typ hat die Singularität $z_0 = 0$ der Funktion $g(z) = f(\frac{1}{z})$?