

FUNKTIONENTHEORIE

Übungsblatt 4

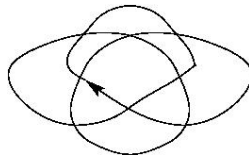
Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P11) Zeigen Sie:

- a) Ist γ eine glatte Schleife in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so ist γ in $\mathbb{C}^*$ homotop durch glatte Schleifen zu einer Schleife mit Bild in S^1 .
- b) Ist $U \subset \mathbb{C}$ konvex und sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ zwei glatte Wege mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$, so sind γ_0 und γ_1 homotop relativ zu den Endpunkten in U .

(P12) Zeigen Sie, dass eine holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ konstant sein muss, falls $\operatorname{Re} f(z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(P13) Bestimmen Sie die Umlaufzahlen $w(\gamma, z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Im} \gamma$, wobei γ eine Parametrisierung in angegebener Richtung der folgende Kurve sei:



(P14) Seien f und g holomorph auf $U \subset \mathbb{C}$, und sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ ein Weg. Beweisen Sie die Formel für partielle Integration:

$$\int_{\gamma} f(z)g'(z) dz = f(\gamma(1))g(\gamma(1)) - f(\gamma(0))g(\gamma(0)) - \int_{\gamma} f'(z)g(z) dz.$$

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 10.5. in der Vorlesung.

(H14) Sei $U \subset \mathbb{C}$ sternförmig und $f : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Zeigen Sie, dass eine holomorphe Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ existiert, so dass

$$f(z) = e^{h(z)}$$

für alle $z \in U$.

(H15) Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_{|z|=1} \frac{\cos(z^3) + \sin(z)}{z^4 + 2z^3} dz,$

b) $\int_{|z-1|=3} \frac{e^{\alpha z}}{2z^2 - 5z + 2} dz$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ (*Hinweis: Partialbruchzerlegung*),

c) $\int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n dz$ für $n \in \mathbb{N}$, und

d) $\int_0^{2\pi} e^{it+e^{it}} dt.$

(H16) Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Beweisen Sie:

- a) Ist f nicht konstant, so liegt $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$, d.h. $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$ enthält keinen offenen Ball.
- b) Gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ die Ungleichung $|f(z)| \leq |z|^n$, so ist f ein Polynom.
- c)* Sind $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, und gilt $f(z + \lambda) = f(z) = f(z + \mu)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

(H17) Sei γ eine glatte Schleife in $\mathbb{C}^*$ und $k := w(\gamma, 0) \in \mathbb{Z}$ deren Umlaufzahl um 0. Beweisen Sie, dass γ homotop durch glatte Schleifen in $\mathbb{C}^*$ zur Schleife $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\gamma_k(t) = e^{2\pi i k t}$ ist!

Hinweis: Betrachten Sie noch einmal den Beweis von Proposition 6 des aktuellen Kapitels.