Universität Hamburg
Janko Latschev
Immanuel Stampfli

Sommer 2016

Funktionentheorie

Übungsblatt 1

Präsenzaufgaben für die Übung

(P1) Wieviele komplexe Lösungen besitzt die Gleichung

$$\cos(z) = 2016\,?$$

(P2) Sei $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, welche unter der Identifikation $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ der Multiplikation mit $\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ entspricht. Wir nennen eine reell lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *komplex linear*, falls $AI = IA$, und *komplex anti-linear*, falls $AI = -IA$.

- **a)** Jede reell lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ besitzt eine eindeutige Zerlegung $A = A' + A''$ mit A' komplex linear und A'' komplex anti-linear.
- **b)** Die darstellende Matrix von A bezüglich der Standardbasis sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen von A' und A''!
- **c)** Was können Sie über A' und A'' sagen, wenn die Abbildung A reellen Rang 1 besitzt?

(P3) Wir hatten für komplexe Zahlen $a, z \in \mathbb{C}$ mit $a \notin (-\infty, 0]$ die Potenz definiert als

$$a^z := \exp(z \log(a)),$$

wobei $\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des komplexen Logarithmus ist. Zeigen Sie an einem geeigneten Beispiel, dass die Gleichung

$$a^z \cdot b^z = (ab)^z$$

im Allgemeinen *nicht* gelten muss!

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 19.4. in der Vorlesung.

(H1) **a)** Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + \mathbf{i}y$:

(i) $\frac{1-2\mathbf{i}}{1+\frac{1}{3}\mathbf{i}}$ (ii) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi\mathbf{i}}{12}}$ (iii) $\mathbf{i}^{\mathbf{i}}$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^5 = 4 - 4\mathbf{i}$!

c) Wieviele Elemente enthält die Menge $\{\left(\frac{2+\mathbf{i}}{2-\mathbf{i}}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$?

(H2) Skizzieren Sie folgende Teilmengen $M_j \subset \mathbb{C}$:

a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 3 < |z| < 10\}$

b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| + |z + i| < 4\}$

c) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) > 0\}$

d) $M_4 := \{z \in \mathbb{C}^* \mid \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) \leq 2\}$

e) $M_5 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = \operatorname{Re}(z)\}$

f) $M_6 := \{z \in \mathbb{C} \mid z\overline{z} + z - 3\overline{z} + 1 = 0\}$

Entscheiden Sie außerdem für jede dieser Mengen, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt und/oder kompakt ist!

(H3) Zeigen Sie, dass drei komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ genau dann ein gleichseitiges Dreieck in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ bilden, falls

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

gilt!

(H4) Zu $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{C}$ mit $|c|^2 > \alpha\delta$ betrachten wir die Teilmenge

$$M = M_{\alpha,\delta,c} := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha z\bar{z} + \bar{c}z + c\bar{z} + \delta = 0\}.$$

Beweisen Sie:

a) Ist $\alpha = 0$, so ist M eine Gerade in $\mathbb{C}$.

b) Ist $\alpha \neq 0$, so ist M ein Kreis in $\mathbb{C}$.

c) Umgekehrt lassen sich jede Gerade und jeder Kreis in $\mathbb{C}$ in dieser Form schreiben.