Universität Hamburg
Janko Latschev

Topologie

Sommer 2011

Zur Übungsstunde 1

Da ich in der Übungsstunde etwas Verwirrung bezüglich der folgenden Aufgabe gestiftet hatte, hier noch mal das Problem und die Lösung.

5. Sei $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ eine Abbildung zwischen nichtleeren topologischen Räumen. Untersuchen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie Stetigkeit von f impliziert oder aus der Stetigkeit von f folgt.

a) Das Bild jeder offenen Menge ist offen.

b) Jede Menge, deren Bild offen ist, ist selbst offen.

c) Das Bild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.

d) Jede Menge, deren Bild abgeschlossen ist, ist selbst abgeschlossen.

Ändert sich etwas, wenn man zusätzlich annimmt, dass f surjektiv (oder injektiv) ist?

Lösung:

Hier noch einmal die vollständig ausgefüllte Tabelle. Die Zahlen in Klammern verweisen auf die Beispiele und Beweise unten.

	f beliebig	f surjektiv	f injektiv
(a) $\Rightarrow$ stetig	nein (1)	nein (1)	nein (1)
stetig $\Rightarrow$ (a)	nein (2)	nein (2)	nein (2)
(b) $\Rightarrow$ stetig	nein (3)	ja (5)	nein (3)
stetig $\Rightarrow$ (b)	nein (4)	nein (4)	ja (6)
(c) $\Rightarrow$ stetig	nein (1)	nein (1)	nein (1)
stetig $\Rightarrow$ (c)	nein (2)	nein (2)	nein (2)
(d) $\Rightarrow$ stetig	nein (3)	ja (5)	nein (3)
stetig $\Rightarrow$ (d)	nein (4)	nein (4)	ja (6)

(1) Man betrachte als Beispiel die Identität $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Abbildung von der antidiskreten Topologie in irgendeine feinere Topologie.
(2) Man betrachte umgekehrt als Beispiel die Identität $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Abbildung von der diskreten Topologie in irgendeine gröbere Topologie.
(3) Man betrachte als Beispiel die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert als

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

Bitte wenden!

bezüglich der Standardtopologie.
(4) Man betrachte als Beispiel die konstante Abbildung $c : \mathbb{R} \to \{0\}$ bezüglich der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ (der Bildraum besteht nur aus einem Punkt).
(5) Ist f surjektiv, so ist jede Teilmenge $M \subset Y$ wirklich Bild ihres Urbildes. Ist also M offen(abgeschlossen), so ist nach der Bedingung auch $f^{-1}(M)$ offen (abgeschlossen).
(6) Ist f injektiv, so ist das Urbild des Bildes $f(N) \subset Y$ einer Teilmenge $N \subset X$ gerade wieder die Menge N selbst. Ist also $f(N)$ offen (abgeschlossen), so ist $N = f^{-1}(f(N))$ wegen der Stetigkeit auch offen (abgeschlossen).

Insbesondere sehen wir also, dass für bijektive Abbildungen die Aussagen (b) und (d) äquivalent zur Stetigkeit von f sind; außerdem sind dann (a) und (c) gerade Beschreibungen der Stetigkeit von f^{-1}.