Universität Hamburg
Janko Latschev

Topologie

Sommer 2011

# Übungsstunde 6

**1.** Seien $\gamma_0 \in \Omega(X; x_0, x_1)$, $\gamma_1 \in \Omega(X; x_1, x_2)$ und $\gamma_2 \in \Omega(X; x_2, x_3)$ drei Wege in $X$. Konstruieren Sie eine explizite Homotopie relativ zu den Endpunkten zwischen $\gamma_0 \star (\gamma_1 \star \gamma_2)$ und $(\gamma_0 \star \gamma_1) \star \gamma_2$!

**2.** $X$ und $Y$ seien homotopieäquivalente topologische Räume. Entscheiden Sie zu jeder der folgenden Eigenschaften von $X$, ob $Y$ diese auch haben muss:

**a)** $X$ ist wegzusammenhängend.

**b)** $X$ ist zusammenhängend.

**c)** $X \setminus *$ ist zusammenhängend, wobei $* \in X$ ein beliebiger Punkt ist.

**d)** $X$ ist kompakt.

**e)** $X$ besitzt eine abzählbare Basis.

**f)** $X$ ist Hausdorffsch.

**3.** Für beliebige punktierte topologische Räume $(X_i, x_i)_{i \in I}$ ist die Einpunktvereinigung $\bigvee_{i \in I} X_i$ definiert als die Verklebung von $\sqcup_{i \in I} X_i$ mit einem Einpunktraum $Y = \{*\}$ entlang der offensichtlichen Abbildung $f : A \to Y$, wobei $A \subset \sqcup_{i \in I} X_i$ gerade die Teilmenge aller Basispunkte ist.

**a)** Beschreiben Sie eine Einbettung von $\bigvee_{i=1}^n S^1$ (Einpunktvereinigung von $n$ Kopien von $S^1$) in $\mathbb{R}^2$.

**b)** Zeigen Sie: Sind $x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^2$, so ist das Bild einer geeigneten Einbettung von $\bigvee_{i=1}^n S^1$ ein strenger Deformationsretrakt von $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$.

**c)** Gilt eine analoge Aussage im $\mathbb{R}^3$?