Übungsstunde 2

1. Gruppieren Sie die folgenden Gegenstände in Homöomorphieklassen, wobei jeweils die gebräuchlichste Form gemeint ist: Tasse, Teekanne (ohne Deckel), Wasserglas, Strohhalm, Löffel, Gabel, Messer, Teller, Nagel, Schraube, Mutter (passend zu Schraube, nicht zu Vater!), Blumentopf (mit Loch im Boden), Schlüssel.

2. Zu welchen bekannten Räumen sind die folgenden Quotientenräume homöomorph?

a) der Quotient von $\mathbb{R}^2$ bezüglich der $\mathbb{Z}_2$-Wirkung durch Multiplikation mit ± 1.

b) die Verklebung von zwei abgeschlossenen Bällen D^n entlang der Identität als Abbildung zwischen den beiden Randsphären.

c) die Verklebung des Möbiusbandes M und der Kreisscheibe D^2 entlang eines Homöomorphismus ihrer Ränder.

d) die Verklebung des Möbiusbandes M und des Kreises S^1 entlang der Abbildung $f\colon \partial M \cong S^1 \to S^1, f(z) = z^2$. Hier bezeichnet ∂M den Rand des Möbiusbandes, und die Abbildung f ist die Verknüpfung zweier Abbildungen: die erste identifiziert diesen Rand mit dem Kreis $S^1 \in \mathbb{C}$, und die zweite bildet das Quadrat der erhaltenen komplexen Zahl.

3. Auf dem Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen reeller Zahlen haben wir bereits zwei Topologien kennengelernt: die Produkttopologie und die Boxentopologie. Die *uniforme Topologie* auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist die metrische Topologie, die von der Metrik

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\max(|x_n - y_n|, 1)\}$$

erzeugt wird.

a) Vergleichen Sie die drei Topologien paarweise!

b) In welcher der Topologien sind die folgenden Abbildungen stetig?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, t \mapsto (t, 2t, 3t, \dots)$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, t \mapsto (t, \frac{t}{2}, \frac{t}{3}, \dots)$$

c) * Betrachten Sie die Teilmenge $\mathbb{R}^\infty \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen, die nur endlich viele von 0 verschiedene Glieder haben. Was ist der Abschluss von $\mathbb{R}^\infty$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bezüglich jeder der drei Topologien?