Janko Latschev

Übungsstunde 1

1. Gibt es einen metrischen Raum (X, d), Punkte $x, y \in X$ und Radien $0 < r < R$, so dass $B(x, R) \subset B(y, r)$? Geben Sie ein Beispiel oder beweisen Sie die Unmöglichkeit eines solchen!

2. Ist (X, τ) ein topologischer Raum, so sieht man aus der Definition leicht, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. Die Teilmenge $U \subset X$ ist offen.
2. Für jeden Punkt $x \in U$ und jede offene Umgebung $V \subset X$ von x ist $U \cap V$ offen.
3. Jeder Punkt $x \in U$ besitzt eine offene Umgebung $V \subset X$, so dass $U \cap V$ offen ist.

Die Offenheit einer Teilmenge ist also eine lokale Eigenschaft, d.h. es genügt, sie in der Umgebung jedes ihrer Punkte zu prüfen. Gilt das auch für Abgeschlossenheit? Mit anderen Worten: Sei $A \subset X$ eine Teilmenge, so dass jeder Punkt $x \in A$ eine Umgebung $V \subset X$ besitzt, so dass $A \cap V$ abgeschlossen ist. Ist A selbst abgeschlossen?

3. Sei X eine nichtleere Menge und seien β_1 und β_2 zwei Teilmengen in $\mathcal{P}(X)$, welche die Bedingungen (B1) und (B2) für eine Basis erfüllen. Die beiden Basen heißen *äquivalent*, falls für die von ihnen erzeugten Topologien $\tau_1 = \tau_2$ gilt.

Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Äquivalenz von Basen, ohne die von ihnen erzeugten Topologien explizit zu erwähnen!

4. Sei X eine Menge, (Y, τ_Y) ein topologischer Raum, und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Was ist die gröbste Topologie auf X, für die f stetig ist?

5. Sei $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ eine Abbildung zwischen nichtleeren topologischen Räumen. Untersuchen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie Stetigkeit von f impliziert oder aus der Stetigkeit von f folgt.

a) Das Bild jeder offenen Menge ist offen.

b) Jede Menge, deren Bild offen ist, ist selbst offen.

c) Das Bild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.

d) Jede Menge, deren Bild abgeschlossen ist, ist selbst abgeschlossen.

Ändert sich etwas, wenn man zusätzlich annimmt, dass f surjektiv (oder injektiv) ist?

6. Beweisen Sie mit Hilfe der Topologie aus der Vorlesung, dass es unendlich viele Primzahlen gibt!