Universität Hamburg
Janko Latschev Sommer 2011

Topologie

Übungsaufgaben 9

1. Gegeben seien die eingebetteten Kreise $K_i \subset \mathbb{R}^3$, wobei

$$K_1 := \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0) \,:\, t \in [0,1]\}$$
$$K_2 := \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 2) \,:\, t \in [0,1]\}$$
$$K_3 := \{(1 + \cos 2\pi t, 0, \sin 2\pi t) \,:\, t \in [0,1]\}$$

Zeichnen Sie eine Skizze der drei Kreise in $\mathbb{R}^3$ und zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3 \setminus (K_1 \cup K_2)$ nicht zu $\mathbb{R}^3 \setminus (K_1 \cup K_3)$ homöomorph ist! Ist $\mathbb{R}^3 \setminus (K_1 \cup K_2)$ homöomorph zu $\mathbb{R}^3 \setminus (K_2 \cup K_3)$?

2. Zeigen Sie, dass für jeden topologischen Raum X die Gruppen $\pi_2(X, x_0)$ und $\pi_1(\Omega(X, x_0), \epsilon_{x_0})$ natürlich isomorph sind, wobei wie immer $\Omega(X, x_0)$ die Menge der Schleifen mit Fusspunkt $x_0 \in X$ (hier als topologischer Raum mit der kompakt-offenen Topologie, vgl. Aufgabe 4 auf Blatt 3) und ϵ_{x_0} den konstanten Weg in x_0 bezeichnet!

3. In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass die Fundamentalgruppe jeder topologischen Gruppe abelsch ist.

a) Es sei X eine nichtleere Menge, auf der zwei binäre Operationen $\star$ und $\odot$ definiert sind, welche folgende Bedingungen erfüllen:

1. Es gibt ein Element $\epsilon \in X$, so dass $\epsilon \odot x = x \odot \epsilon = \epsilon \star x = x \star \epsilon = x$ für alle $x \in X$ gilt.
2. Für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ gilt $(x_1 \star x_2) \odot (y_1 \star y_2) = (x_1 \odot y_1) \star (x_2 \odot y_2)$.

Zeigen Sie, dass die Operationen $\star$ und $\odot$ übereinstimmen und abelsch sind!

b) Ist G eine topologische Gruppe, so entsteht durch punktweise Multipikation zweier Schleifen $\gamma, \gamma' \in \Omega(G, e)$ eine neue Schleife $\gamma \cdot \gamma' \in \Omega(G, e)$ mit $(\gamma \cdot \gamma')(t) = \gamma(t)\gamma'(t)$. Zeigen Sie, dass diese Operation zu einer Operation $\odot : \pi_1(G, e) \times \pi_1(G, e) \to \pi_1(G, e)$ absteigt!

c) Zeigen Sie, dass die Gruppenmultiplikation $\star$ und die gerade betrachtete Operation $\odot$ auf $\pi_1(G, e)$ die Voraussetzungen von Teil **a)** erfüllen.

4. **a)** Zeigen Sie, dass eine freie Wirkung einer endlichen Gruppe auf einem Hausdorff-Raum diskontinuierlich ist!

b) Seien nun $m, n \in \mathbb{Z}$ teilerfremd. Zeigen Sie, dass die durch

$$\mu_{m,n}([k], (z_1, z_2)) := (e^{\frac{2\pi i k}{m}} z_1, e^{\frac{2\pi i k n}{m}} z_2)$$

gegebene Wirkung von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ auf $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,:\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$ frei ist!

Die so erhaltenen Quotientenräume $S^3/\mu_{m,n}$ heissen *Linsenräume* und werden mit $L(m, n)$ bezeichnet. Nach einer Proposition der Vorlesung ist also die Projektion $p_{m,n} : S^3 \to L(m, n)$ eine m-fache Überlagerung. $L(2, 1)$ ist gerade wieder der reelle projektive Raum $\mathbb{R}P^3$.