Universität Hamburg
Janko Latschev Sommer 2011

# Topologie

## Übungsaufgaben 8

**1.** Hier untersuchen wir einige Aussagen zu freien Gruppen.

**a)** Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ nicht endlich ist!

**b)** Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ nicht abelsch ist!

**c)** Gelten diese beiden Aussagen für das freie Produkt beliebiger nichttrivialer Gruppen $G_1$ und $G_2$?

**d)** Finden Sie einen injektiven Homomorphismus $F_3 \to F_2$, wobei $F_k$ die freie Gruppe mit $k$ Erzeugern sein soll!

**2.** Bei der Berechnung von $\pi_1(S^1)$ haben wir den Homomorphismus $d : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ definiert.

**a)** Zeigen Sie, dass $d$ eine Bijektion $\deg : [S^1, S^1] \to \mathbb{Z}$ induziert! Diese nennt man *Abbildungsgrad*. (Zur Erinnerung: Die Menge $[S^1, X]$ der freien Homotopieklassen von Abbildungen $S^1 \to X$ für beliebiges $X$ wurde auf dem letzten Übungsblatt beschrieben.)

**b)** Zeigen Sie, dass für stetige $f, g : S^1 \to S^1$

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g)$$

gilt!

**c)** Wie berechnen sich aus $\deg(f)$ die Grade $\deg(-f)$ und $\deg(\bar{f})$? Hier soll $\bar{f}$ die Abbildung $z \mapsto \overline{f(z)}$ sein, wobei in der Formel der Balken für komplexe Konjugation steht.

**d)** Welchen Grad kann eine Homotopieäquivalenz $f : S^1 \to S^1$ haben?

**e)** Beweisen Sie, dass jedes $f : S^1 \to S^1$ mit $\deg(f) \neq 0$ surjektiv ist! Gilt die Umkehrung?

**3.** Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe von $X = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist! Dabei können Sie entweder den Raum $X$ als Vereinigung zweier geeigneter offener Teilmengen schreiben und den Satz von Seifert und van Kampen anwenden, oder Sie zeigen, dass $S^1 \vee S^2$ ein Deformationsretrakt von $X$ ist.

**Bitte wenden!**

**4.** Ein Hausdorff–Raum $X$ heisst *parakompakt*, falls es zu jeder Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ eine lokal–endliche Verfeinerung $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ gibt. Verfeinerung heisst hier, dass zu jedem $V_\alpha$ ein $i \in I$ mit $V_\alpha \subset U_i$ existiert. Lokal–endlich heisst, dass jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung besitzt, welche nur endlich viele $V_\alpha$ schneidet. Zeigen Sie:

**a)** Jeder parakompakte Raum ist normal.

**b)** Ist ein Hausdorff–Raum $X = \cup_{i=1}^{\infty} K_i$ eine abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen $K_i$, so ist $X$ parakompakt.

**c)** Zeigen Sie, dass es in einem parakompakten Raum $X$ zu jeder offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins gibt, d.h. stetige Abbildungen $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i \in I$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $f_i(x) \geq 0$ für alle $x \in X$ und $i \in I$.
2. die offenen Mengen $V_i := f_i^{-1}((0,\infty))$ bilden eine lokal–endliche Überdeckung von $X$ und es gilt $V_i \subset U_i$ für alle $i \in I$.
3. $\sum_{i\in I} f_i(x) = 1$.