Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2011

TOPOLOGIE

Übungsaufgaben 7

1. Zeigen Sie, dass es zu drei offenen Teilmengen U_1, U_2 und U_3 im $\mathbb{R}^3$ mit kompaktem Abschluss eine (affine) Ebene gibt, welche alle drei gleichzeitig in jeweils zwei Hälften mit gleichem Volumen zerlegt!
Was bedeutet diese Aussage für das faire Teilen von belegten Broten?

2. Für beliebige punktierte topologische Räume $(X_i, x_i)_{i\in I}$ ist die Einpunktvereinigung $\bigvee_{i\in I} X_i$ definiert als die Verklebung von $\sqcup_{i\in I} X_i$ mit einem Einpunktraum $Y = \{*\}$ entlang der offensichtlichen Abbildung $f : A \to Y$, wobei $A \subset \sqcup_{i\in I} X_i$ gerade die Teilmenge aller Basispunkte ist.

a) Beschreiben Sie eine Einbettung von $\bigvee_{i=1}^n S^1$ (Einpunktvereinigung von n Kopien von S^1) in $\mathbb{R}^2$.

b) Zeigen Sie: Sind $x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^2$, so ist das Bild einer geeigneten Einbettung von $\bigvee_{i=1}^n S^1$ ein strenger Deformationsretrakt von $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$.

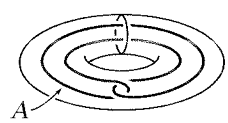
c) Gilt eine analoge Aussage im $\mathbb{R}^3$?

3. Zeigen Sie, dass in den folgenden Fällen die Teilmenge $A \subset X$ jeweils kein Retrakt ist:

a) $X = \mathbb{R}^3$ und A ist das Bild einer beliebigen Einbettung von S^1.

b) $X = S^1 \times D^2$ und A ist der im Bild gezeichnete Kreis.

c) $X = (D^2, 1) \vee (D^2, 1)$ und A ist der Rand $S^1 \vee S^1$ von X.



aus:
A. Hatcher
"Algebraic topology"

4. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ kann man als Menge der relativen Homotopieklassen von Abbildungen $S^1 \to X$ auffassen, welche den Basispunkt $1 \in S^1$ auf $x \in X$ abbilden. Sei $[S^1, X]$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $S^1 \to X$ ohne Bedingungen an den Basispunkt (will man dies betonen, dann spricht man von *freien* Homotoopieklassen). Dann gibt es eine natürliche Abbildung $\Phi : \pi_1(X, x) \to [S^1, X]$, welche jeder relativen Homotopieklasse ihre freie Homotopieklasse zuordnet.

a) Zeigen Sie, dass Φ für wegzusammenhängendes X surjektiv ist!

b) Zeigen Sie, dass zwei Elemente $[\gamma_0]$ und $[\gamma_1]$ in $\pi_1(X, x)$ genau dann das gleiche Bild unter Φ haben, wenn sie in der Gruppe $\pi_1(X, x)$ konjugiert zueinander sind!

Insbesondere induziert also für wegzusammenhängendes X die Abbildung Φ eine Bijektion zwischen Konjugationsklassen in $\pi_1(X)$ und der Menge $[S^1, X]$ der freien Homotopieklassen.