Universität Hamburg Sommer 2011
Janko Latschev

Topologie

Übungsaufgaben 6

1. Beweisen Sie, dass $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz ist, falls Abbildungen $g \colon Y \to X$ und $h \colon Y \to X$ existieren, so dass $f \circ g$ und $h \circ f$ Homotopieäquivalenzen sind.

2. Sei X wegzusammenhängend. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) X ist einfach zusammenhängend.

b) Jede Abbildung $\gamma : S^1 \to X$ besitzt eine Fortsetzung zu einer Abbildung $G : D^2 \to X$ mit $G|_{S^1} = \gamma$.

c) Für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ sind je zwei beliebige Wege $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega(X; x_0, x_1)$ stets homotop relativ zu den Endpunkten.

3. Beweisen Sie, dass die Sphären S^n für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend sind, indem Sie folgendes zeigen:

a) Jeder Weg $\gamma \in \Omega(S^n; x)$, welcher einen Punkt $y \neq x$ in S^n nicht trifft, ist homotop rel $\{0,1\}$ zum konstanten Weg ϵ_x.

b) Sei nun $y \in S^n$ und $B(y,r) \subset S^n$ ein offener Ball um y, welcher x nicht enthält. Ist dann $\gamma \in \Omega(X, x)$ beliebig, so gibt es endlich viele disjunkte offene Intervalle $(a_i, b_i) \subset [0,1]$, welche $\gamma^{-1}(y)$ überdecken und so gewählt werden können, dass ihre Randpunkte auf Randpunkte von $B(y,r)$ abgebildet werden.

c) Ist $n \geq 2$, so sind die Einschränkungen $\gamma|_{[a_i,b_i]}$ jeweils homotop zu Wegen in $\overline{B(y,r)}$, welche y nicht treffen.

d) Aus diesen Aussagen folgt die Behauptung.

4. Zeigen Sie, dass die folgenden Paare von Räumen jeweils homotopieäquivalent sind:

a) $K^2 \setminus *$ und $S^1 \vee S^1$.

b) $\mathbb{R}P^{n+1} \setminus *$ und $\mathbb{R}P^n$.

c) $\mathbb{C}P^{n+1} \setminus *$ und $\mathbb{C}P^n$.

Hier können Sie sich jeweils einen beliebigen Punkt $*$ im jeweiligen Raum aussuchen.