Universität Hamburg
Janko Latschev Sommer 2011

Topologie

Übungsaufgaben 5

1. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Zeigen Sie, dass für Teilmengen $A, B \subset X$ aus $A \cup B \in \mathcal{F}$ bereits $A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$ folgt.

2. Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen Mengen und $\mathcal{F}$ ein Filter auf Y. Bilden die Urbilder der Mengen $F \in \mathcal{F}$ eine Filterbasis, so heisst der Filter zu dieser Basis *Urbild von* $\mathcal{F}$ und wird mit $f^{-1}(\mathcal{F})$ bezeichnet. Zeigen Sie:

a) Es sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ eine Filterbasis des Filters $\mathcal{F}$ auf Y. Dann hat $\mathcal{F}$ genau dann ein Urbild, wenn keine Menge aus $\mathcal{B}$ ein leeres Urbild hat.

b) Ist $\mathcal{F}$ schon Bild eines Filters $\mathcal{G}$ auf X, so besitzt $\mathcal{F}$ ein Urbild.

c) Ist $\mathcal{G}$ Filter auf X, so ist $f^{-1}(f(\mathcal{G}))$ gröber als $\mathcal{G}$, und falls f injektiv ist gilt Gleichheit.

d) Ist $\mathcal{F}$ Filter auf Y und existiert $f^{-1}(\mathcal{F})$, so ist $f(f^{-1}(\mathcal{F}))$ feiner als $\mathcal{F}$, und falls f surjektiv ist gilt Gleichheit.

3. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen für einen topologischen Raum X:

a) X ist Hausdorffsch.

b) Für jeden Punkt $x \in X$ ist der Durchschnitt aller seiner abgeschlossenen Umgebungen gleich $\{x\}$.

c) Jeder konvergente Filter auf X besitzt genau einen Limespunkt.

Eine abgeschlossene Umgebung von $x \in X$ ist eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ mit $x \in \operatorname{int} A$.

4. Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der Sorgenfrey–Topologie τ_S, welche von den halboffenen Intervallen $[a, b)$ erzeugt wird.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \tau_S)$ normal ist!

b) Zeigen Sie, dass das Produkt $X = (\mathbb{R}, \tau_S) \times (\mathbb{R}, \tau_S)$ regulär ist!

c) Zeigen Sie, dass X nicht normal ist!

Ein möglicher Zugang dazu besteht darin, folgendes Lemma zu beweisen und auf $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ und $S = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset X$ anzuwenden:
Lemma: Enthält X eine dichte Teilmenge D und einen abgeschlossenen diskreten Teilraum S, so dass $\operatorname{card} S \geq \operatorname{card} \mathcal{P}(D)$, so ist X nicht normal.