Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2011

Topologie

Übungsaufgaben 4

1. Sei X ein (nichtleerer) kompakter Hausdorff-Raum. Zeigen Sie: ist jeder Punkt von X Häufungspunkt von X, so ist X überabzählbar! Überlegen Sie sich dazu die folgenden Schritte:

a) Ist $x \in X$ und ist $U \subset X$ eine nichtleere offene Menge, so existiert eine offene Teilmenge $V \subset U$ mit $x \notin \overline{V}$.

b) Für jede Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ gibt es einen Punkt $x \in X$, der nicht im Bild liegt. (Beschreiben Sie diesen Punkt als Element eines geeigneten Durchschnitts kompakter Teilmengen.)

2. **a)** Zeigen Sie, dass jeder Punkt der Cantor–Menge C Häufungspunkt von C ist! Daraus folgt insbesondere, dass C überabzählbar ist.

b) Beschreiben Sie eine abzählbare dichte Teilmenge von C!

Man kann zeigen, dass jeder kompakte metrische Raum X, der jeden seiner Punkte als Häufungspunkt besitzt und dessen Zusammenhangskomponenten jeweils nur aus einem Punkt bestehen homöomorph zu C ist.

3. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $\mathcal{B}(X)$ die Menge der nichtleeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von X, d.h.

$$\mathcal{B}(X)\colon \{A \subset X \mid A \neq \varnothing, A = \overline{A}, \operatorname{diam} A < \infty\}.$$

a) Zeigen Sie, dass durch $\varrho(A, B) = \max\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\}$ eine Metrik auf $\mathcal{B}(X)$ definiert wird!

Wir betrachten nun als Spezialfall $X = \mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik.

b) Welche Abzählbarkeitsaxiome erfüllt $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \varrho)$?

c) Ist $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \varrho)$ lokal–kompakt?

4. Zeigen Sie, dass für einen Hausdorff-Raum X mit abzählbarer Basis folgende Aussagen äquivalent sind:

a) X ist kompakt.

b) Jede abzählbare Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung.

c) X ist folgenkompakt.

d) Jede unendliche Teilmenge von X hat einen Häufungspunkt.