Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2011

Topologie

Übungsaufgaben 3

1. Zeigen Sie, dass zwei disjunkte kompakte Teilmengen eines Hausdorff-Raumes stets disjunkte offene Umgebungen besitzen!

2. Zeigen Sie: Ein topologischer Raum X ist genau dann Hausdorffsch, wenn die Diagonale

$$\Delta := \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$$

abgeschlossen in $X \times X$ ist.

3. Sei X ein kompakter metrischer Raum. Für eine beliebige Teilmenge $S \subset X$ sei

$$\operatorname{diam} S : = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in S\}$$

der Durchmesser der Teilmenge S. Zeigen Sie, dass es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine reelle Zahl $\lambda > 0$ gibt, so dass jede Teilmenge $S \subset X$ mit $\operatorname{diam} S < \lambda$ in einer der Mengen U_i enthalten ist!
Eine solche Zahl λ heisst *Lebesgue-Zahl* der Überdeckung $\mathcal{U}$.

4. Sei $C(X,Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen eines Raumes X in einen Raum Y. Zu einer kompakten Menge $K \subset X$ und einer offenen Menge $O \subset Y$ definieren wir

$$U(K,O) := \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset O\}.$$

Die *kompakt–offene Topologie* auf $C(X,Y)$ ist die von der Subbasis

$$\sigma := \{U(K,O) \mid K \subset X \text{ kompakt}, O \subset Y \text{ offen}\}$$

erzeugt wird.

a) Zeigen Sie, dass $C(X,Y)$ in dieser Topologie Hausdorffsch ist, falls Y Hausdorffsch ist!

b) Ist die Auswertungsabbildung $\varepsilon : C(X,Y) \times X \to Y$, $\varepsilon(f,x) = f(x)$ stetig, wenn X lokal kompakt ist?

c) Zeigen Sie das Exponentialgesetz: Sind X und Y Hausdorffsch und ist Y lokal kompakt, so ist die kanonische Abbildung zwischen den Räumen $C(X \times Y, Z)$ und $C(X, C(Y,Z))$ ein Homöomorphismus.

d) Zeigen Sie, dass die kompakt–offene Topologie auf $C([0,1],\mathbb{R})$ mit der von der Metrik

$$d_\infty(f,g) := \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

erzeugten uniformen Topologie übereinstimmt!

e) Gilt die Aussage in **d)** auch für den Raum $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der beschränkten stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$?