Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2011

Topologie

Übungsaufgaben 2

1. Für $n \in \mathbb{N}$ seien nichtleere metrische Räume (X_n, d_n) gegeben.

a) Zeigen Sie, dass für festes n die Funktion $d'_n(x, y) := \frac{d_n(x_n, y_n)}{1+d_n(x_n, y_n)}$ eine Metrik auf X_n definiert, welche dieselbe metrische Topologie induziert wie d_n.

b) Zeigen Sie, dass

$$d((x_n), (y_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d'_n(x_n, y_n)$$

eine Metrik auf dem Produkt $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ definiert! Warum ist es wichtig, hier die Metriken d'_n zu benutzen?

c) Stimmt die von d induzierte metrische Topologie mit der Produkttopologie überein?

2. Sei $C \in [0, 1]$ die in der Vorlesung eingeführte Cantor-Menge. Wir betrachten außerdem den Produktraum $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ der unendlichen Folgen aus Nullen und Einsen, den wir als unendliches Produkt diskreter Räume topologisieren.

a) Zeigen Sie, dass C und X homöomorph sind!

b) Beschreiben Sie die Zusammenhangskomponenten von C!

c) Finden Sie eine stetige, monotone, surjektive Abbildung $f : C \to [0, 1]$!

d) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$h \colon C \to C \times C$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{3^n} \mapsto \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_{2n-1}}{3^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_{2n}}{3^n} \right)$$

ein Homöomorphismus ist!

e) Wir definieren eine Abbildung $F = f' \circ h \colon C \to [0, 1] \times [0, 1]$, wobei $f' \colon C \times C \to [0, 1] \times [0, 1]$ als $f'(x, y) = (f(x), f(y))$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass F stetig und surjektiv ist!

f) Beschreiben Sie die Cantor-Menge C als Komplement einer abzählbaren Vereinigung offener Intervalle (falls dies in der Analysis nicht vorkam und Sie hier Schwierigkeiten haben, dann finden Sie die Beschreibung problemlos in Büchern oder im Netz)!

g) Zeigen Sie, dass die Abbildung F Einschränkung einer (notwendig surjektiven) stetigen Abbildung ist, welche auf ganz $[0, 1]$ definiert ist!

Insgesamt haben wir damit eine raumfüllende Kurve konstruiert.

Bitte wenden!

3. Beschreiben Sie die Kleinsche Flasche K^2 als Quotienten bezüglich einer Wirkung von $\mathbb{Z}_2$ auf dem Torus T^2!

4. Seien X und Y zwei Volltori $S^1 \times D^2$, und sei $A = S^1 \times S^1 \subset X$ der Rand von X.

a) Sei $f\colon A \to Y$ gegeben durch $f(x, y) = (y, x)$. Zu welchem bekannten Raum ist die Verklebung $X \cup_f Y$ homöomorph?

b) Welchen Raum erhält man, wenn man stattdessen die Verklebung $X \cup_g Y$ entlang der Identität $g\colon A \to Y$, $g(x, y) = (x, y)$ betrachtet?

5. Sei X ein beschränkter metrischer Raum, d.h. $d(x, y) \leq C$ für alle $x, y \in X$ und ein $C > 0$. Außerdem nehmen wir an, dass X eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt, d.h. es existiert ein $M = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset X$ mit $\overline{M} = X$.

a) Zeigen Sie, dass X in den Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{R})$ der quadratisch-summierbaren reellen Folgen eingebettet werden kann, indem Sie die Abbildung $f(x) \colon = (d(x, x_1), \ldots, \frac{1}{2^n} d(x, x_n), \ldots)$ untersuchen!

b) Gilt die Aussage immernoch, wenn X nicht als beschränkt angenommen wird?

6. Es sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie (weg)zusammenhängender topologischer Räume. Ist das Produkt $\prod_i X_i$ (weg)zusammenhängend? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an!