Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2011

Topologie

Übungsaufgaben 11

1. Beweisen Sie, dass die universelle Überlagerung $(\widetilde{B}, \tilde{p}, B)$ ihren Namen zurecht trägt, indem Sie folgende Aussage beweisen: Ist (E, p, B) irgendeine Überlagerung von B mit wegzusammenhängendem Totalraum E, so existiert eine Überlagerung $(\widetilde{B}, q, E)$ mit $\tilde{p} = p \circ q$!

2. Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen von zusammenhängenden Überlagerungen der Basis $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$!

3. Sei $p(z)$ ein komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$, und sei $K \subset \mathbb{C}$ die Menge der kritischen Werte von p. Beweisen Sie, dass die Einschränkung von p auf $\mathbb{C} \setminus p^{-1}(K)$ eine n-blättrige Überlagerung von $\mathbb{C} \setminus p^{-1}(K)$ nach $\mathbb{C} \setminus K$ ist!

4. Wir betrachten den Raum

$$\tilde{C}^k(\mathbb{R}^n) := \{(x_1, \ldots, x_k) \,|\, x_j \in \mathbb{R}^n, x_j \neq x_\ell \text{ für } j \neq \ell\},$$

welcher *Konfiguationsraum von k geordneten Punkten im* $\mathbb{R}^n$ heisst. Als Unterraum des Produktes ist $\tilde{C}^k(\mathbb{R}^n)$ ein topologischer Raum.

a) Was sind die geschlossenen Wege in $\tilde{C}^k(\mathbb{R}^n)$?

b) Können Sie die Fundamentalgruppe beschreiben (betrachten Sie die Fälle $n = 2$ und $n > 2$ getrennt)?

c) Was passiert für $k = 2$?

Wir betrachten nun zusätzlich noch den Konfigurationsraum

$$C^k(\mathbb{R}^n) := \{F \subset \mathbb{R}^n \,|\, |F| = k\}$$

aller ungeordneten k-Tupel von paarweise verschiedenen Punkten im $\mathbb{R}^n$.

d) Fassen Sie $C^k(\mathbb{R}^n)$ als Quotienten von $\tilde{C}^k(\mathbb{R}^n)$ auf und zeigen Sie, dass die Projektionsabbildung eine Überlagerung ist!

e) Was ist die Gruppe der Decktranformationen dieser Überlagerung?