Universität Hamburg
Janko Latschev Sommer 2011

Topologie

Übungsaufgaben 10

1. Beweisen Sie, dass für eine Überlagerung (E, p, B) mit $p(e_0) = b_0$ die Abbildung

$$p_\sharp : \pi_n(E, e_0) \to \pi_n(B, b_0)$$

für jedes $n > 1$ ein Isomorphismus ist!

2. Sei X ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum mit endlicher Fundamentalgruppe. Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f : X \to S^1$ nullhomotop (d.h. homotop zu einer konstanten Abbildung) ist!

3. Die Abbildungen $p : X \to Y$ und $q : Y \to Z$ seien Überlagerungen.

a) Zeigen Sie, dass $q \circ p : X \to Z$ eine Überlagerung ist, falls $q^{-1}(z)$ für alle $z \in Z$ endlich ist.

b) Geben Sie ein Beispiel, in dem q keine endliche Überlagerung ist und $q \circ p$ gar keine Überlagerung ist!

4. Die Matrizen

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

bilden bezüglich der Multiplikation eine Untergruppe von $GL(2, \mathbb{C})$. Sei $\mathbb{H}$ der von ihnen aufgespannte *reelle* 4-dimensionale Unterraum der komplexen 2×2-Matrizen, d.h.

$$\mathbb{H} := \{a\mathbb{1} + bI + cJ + dK \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$(A, B) \mapsto \frac{1}{2} Tr(A\overline{B}^T)$$

eine Skalarprodukt auf $\mathbb{H}$ definiert, für das die Matrizen $\mathbb{1}$, I, J und K orthonormal sind!

b) Zeigen Sie, dass die Einheitssphäre $S^3 = \{X \in \mathbb{H} \,|\, (X, X) = 1\} \subset \mathbb{H}$ bezüglich dieses Skalarproduktes gerade die Gruppe $SU(2)$ ist!

c) $\mathbb{H}$ wirkt auf sich selbst durch die Konjugation $\mu : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $(A, X) \mapsto AXA^{-1}$. Zeigen Sie, dass diese Wirkung orthogonal ist, d.h. $\|X\|^2 = \|\mu(A, X)\|^2$ gilt, und dass der von I, J und K aufgespannte Unterraum $\Im \subset \mathbb{H}$ invariant bleibt!

d) Zeigen Sie, dass $SO(3)$ homöomorph zu $\mathbb{R}P^3$ ist, indem Sie die Wirkung von $SU(2)$ auf $\Im$ betrachten!